

Συστήματα αρίθμησης - Μετατροπή N-σύστημα $\leftrightarrow$ Δεκαδικό σύστημα

Ένα σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιεί **N** διαφορετικά σύμβολα για να αναπαραστήσει αριθμούς, ονομάζεται **N-δικό** και το **N** λέγεται η **βάση** του συστήματος. Αν **N = 10** έχουμε το **Δεκαδικό** σύστημα, αν **N = 2** έχουμε το **Δυαδικό** σύστημα, αν **N = 16** έχουμε το **Δεκαεξαδικό** κτλ.

Το δεκαδικό σύστημα το ξέρουμε από το δημοτικό: χρησιμοποιεί τα σύμβολα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Κάθε άλλο σύστημα ξεκινάει με το σύμβολο 0 και χρησιμοποιεί τα γνωστά ψηφία (σύμβολα) του δεκαδικού συστήματος. Το τριαδικό σύστημα (3 σύμβολα) χρησιμοποιεί τα 0, 1 και 2. Τα συστήματα που απαιτούν παραπάνω σύμβολα από τα δέκα που έχουμε, αξιοποιούν τα κεφαλαία αγγλικά γράμματα. Π.χ. το 16-δικό (δεκαεξαδικό) σύστημα, εκτός από τους γνωστούς αριθμούς 0, 1, ..., 9 επιπλέον χρησιμοποιεί τα σύμβολα A, B, C, D, E, F που σημαίνουν 10, 11, 12, 13, 14 και 15 αντίστοιχα. Δηλαδή το A σημαίνει 10, το B σημαίνει 11 κ.ο.κ.

Σύστημα αρίθμησης	Επιτρεπόμενα σύμβολα
2-δικό (Δυαδικό)	0, 1
8-δικό (Οκταδικό)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10-δικό (Δεκαδικό)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16-δικό (Δεκαεξαδικό)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15

Αν δίνεται ένας αριθμός χωρίς δείκτη πχ 352, αυτό υπονοεί ότι είναι στο δεκαδικό σύστημα. Για να δηλωθεί ότι ο αριθμός είναι σε άλλο σύστημα, αυτό γράφεται με δείκτη πχ $(352)_8$ ή πιο απλά 352_8 αν το σύστημα δεν είναι προφανές από το περιεχόμενο που εμφανίζεται ο αριθμός. Για να είναι ένας αριθμός **έγκυρος**, θα πρέπει να αποτελείται μόνο από τα επιτρεπτά σύμβολα. Στο δυαδικό σύστημα ο αριθμός 10011_2 είναι επιτρεπτός αλλά δεν μπορούμε να γράψουμε 1311_2 γιατί το σύμβολο **3 ΔΕΝ** υπάρχει στη λίστα των επιτρεπόμενων συμβόλων για το δυαδικό σύστημα. Οι αριθμοί σε οποιοδήποτε σύστημα που ΔΕΝ είναι το δεκαδικό προφέρονται αναφέροντας κάθε σύμβολο ξεχωριστά, πχ ο αριθμός 110_2 προφέρεται ως ένα-ένα-μηδέν και **ΟΧΙ** εκατόν δέκα.

Μετατροπή αριθμού από N-δικό σύστημα στο δεκαδικό

Όταν μας δίνεται ένας αριθμός σε κάποιο σύστημα αρίθμησης, μπορούμε να υπολογίσουμε ποιον αριθμό αντιπροσωπεύει στο δεκαδικό. Η μετατροπή επεξηγείται παρακάτω με ένα παράδειγμα:

Θα μετατρέψουμε το 1101_2 που είναι ένας αριθμός στο δυαδικό σύστημα (βάση $N = 2$).

Ο αριθμός (σύμβολα)	1	1	0	1
Θέση	3	2	1	0
Αξία της θέσης ($N^{\text{Θέση}}$)	2^3	2^2	2^1	2^0



Συνολική τιμή θέσης	$1 * 2^3 = 8$	$1 * 2^2 = 4$	$0 * 2^1 = 0$	$1 * 2^0 = 1$
---------------------	---------------	---------------	---------------	---------------

Σημείωση: $N^k = N * N * N * \dots * N$ (το N πολλαπλασιάζεται k φορές). $N^0 = 1$ όταν $N \neq 0$.

Για τη **Θέση** ξεκινάμε από τα δεξιά προς τα αριστερά μετρώντας από το μηδέν. Η **Θέση** μας βοηθάει να υπολογίσουμε την **αξία της θέσης** που φαίνεται στον πίνακα σύμφωνα με τον τύπο $N^{\text{Θέση}}$ όπου N είναι το N-δικό σύστημα αρίθμησης (N σύμβολα). Πχ στο δυαδικό σύστημα που είναι το παράδειγμά μας, έχουμε $N = 2$ σύμβολα άρα η **αξία της θέσης** με αριθμό 3 είναι 2^3 . Η **αξία της θέσης** είναι αυτό που εκφράζουμε στο δεκαδικό σύστημα ως μονάδες (10^0), δεκάδες (10^1), εκατοντάδες (10^2) κτλ. Σε άλλα συστήματα αλλάζουν οι λέξεις, πχ στο 2-δικό σύστημα λέμε μονάδες (2^0), δυάδες (2^1), τετράδες (2^2), στο 16-δικό σύστημα λέμε μονάδες (16^0), δεκαεξάδες (16^1) κτλ.

Η **συνολική τιμή** κάθε θέσης υπολογίζεται αν πολλαπλασιάσουμε το σύμβολο σε αυτή τη θέση με την αξία της θέσης. Πχ η συνολική τιμή για τη θέση 2 είναι $1 * 2^2 = 4$, το 1 είναι το σύμβολο σε αυτή τη θέση και το 2^2 η αξία της θέσης. Τα προσθέτουμε όλα, ο αριθμός $1101_2 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$.

Παραδείγματα: $68_9 = 6 * 9^1 + 8 * 9^0 = 54 + 8 = 62$ & $3E_{16} = 3 * 16^1 + E * 16^0 = 48 + 14 * 1 = 62$.

Μετατροπή αριθμού από το δεκαδικό σύστημα σε N-δικό

Η μετατροπή από το δεκαδικό σύστημα σε ένα N-δικό χρησιμοποιεί την ακέραια διαίρεση αριθμών. Ακέραιοι αριθμοί είναι οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, ... και οι αντίθετοί τους -1, -2, -3, ... κτλ. Αν δίνονται δύο **ακέραιοι** αριθμοί **α** (ο διαιρετέος) και **β** (ο διαιρέτης), ορίζουμε ως ακέραια διαίρεση του **α** με το **β**, τους **μοναδικούς** ακέραιους **π** (**πηλίκο**) και **υ** (**υπόλοιπο**) τέτοιοι ώστε να ισχύει:

- $\alpha = \pi * |\beta| + \upsilon$
- $0 \leq \upsilon < |\beta|$ ($|\beta|$ είναι η απόλυτη τιμή του β, δηλαδή αν $\beta < 0$ το μετατρέπουμε σε θετικό αριθμό)

Παράδειγμα: στην ακέραια διαίρεση του **α = 17** με το **β = 8**, έχουμε **$17 = \pi * 8 + \upsilon$** και **$0 \leq \upsilon < 8$** . Επειδή $0 \leq \upsilon < 8$ και **υ** ακέραιος, οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει είναι **υ = 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6 ή 7**. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι **π = 2, υ = 1**. Ένας γρήγορος τρόπος υπολογισμού των **π** και **υ**: $17/8 = 2,125 = 2 + 0,125$. Το ακέραιο μέρος (2) είναι το **π** και το **υ = 0,125 * |β| = 0,125 * 8 = 1**.

Η μετατροπή γίνεται ως εξής: σε κάθε βήμα κάνουμε ακέραια διαίρεση του τρέχοντος αριθμού με τη βάση του συστήματος (πχ δυαδικό N = 2) για να πάρουμε το **πηλίκο** και το **υπόλοιπο**. Το πηλίκο είναι ο νέος αριθμός που θα συνεχίσουμε να διαιρούμε μέχρι να γίνει 0.

Με βάση τα παραπάνω, θα μετατρέψουμε τον αριθμό 13 στον αντίστοιχο δυαδικό:

Τιμή α	Τιμή β	π (πηλίκο)	υ (υπόλοιπο)	Επεξήγηση τιμών
13 (αρχικός αριθμός)	2 (δυαδικό)	6	1	$13 = 6 * 2 + 1$
6 (νέα τιμή από π)	2 (δυαδικό)	3	0	$6 = 3 * 2 + 0$
3 (νέα τιμή από π)	2 (δυαδικό)	1	1	$3 = 1 * 2 + 1$
1 (νέα τιμή από π)	2 (δυαδικό)	0	1	$1 = 0 * 2 + 1$

Η διαδικασία σταματάει μόλις βρούμε στο πηλίκο **π** τη τιμή 0. Ο τελικός αριθμός λαμβάνεται αν πάρουμε τις τιμές της στήλης “υπόλοιπο” από κάτω προς τα πάνω, οπότε $13 = 1101_2$. Επιβεβαιώνουμε ότι κάναμε σωστά τις πράξεις μετατρέποντας τον αριθμό 1101_2 στο δεκαδικό.

Παραδείγματα: $33 = 100001_2$, $255 = 11111111_2$, $48 = 30_{16}$, $254 = FE_{16}$, $1852 = 73C_{16}$

Άμεση μετατροπή Δυαδικού σε Δεκαεξαδικό και αντίστροφα

$0000_2 = 0$, $0001_2 = 1$, $0010_2 = 2$, $0011_2 = 3$, $0100_2 = 4$, $0101_2 = 5$, $0110_2 = 6$, $0111_2 = 7$,
 $1000_2 = 8$, $1001_2 = 9$, $1010_2 = A$, $1011_2 = B$, $1100_2 = C$, $1101_2 = D$, $1110_2 = E$, $1111_2 = F$

Παράδειγμα: $10.1100.0110.0001_2 \iff 2C61_{16}$. Οι τελείες ξεχωρίζουν τα δυαδικά ψηφία σε τετράδες για διευκόλυνση. Το αρχικό 10 είναι ο δυαδικός αριθμός 0010 (παραλείψαμε τα 0 στην αρχή).

Ασκήσεις για το σπίτι

1. Εξηγήστε αν είναι έγκυροι οι αριθμοί **1101_2 , 23_3 , 77_8 , 77_5 , 189 , $3F$, $3F_{16}$** .
2. Να μετατρέψετε τους αριθμούς **$1F3_{16}$, 321_4 , 1010_{12}** στο δεκαδικό ισοδύναμό τους.
3. Να μετατρέψετε τους αριθμούς **11 , 75 , 248** στο αντίστοιχο δυαδικό και δεκαεξαδικό σύστημα.
4. Να μετατρέψετε άμεσα τους αριθμούς **$101101010100110_2 = ?_{16}$ και **$CA47_{16} = ?_2$****