

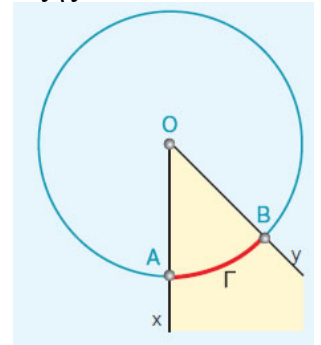
Επίκεντρη γωνία κύκλου

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κατασκευάζουμε έναν κύκλο (O, ρ) και μια γωνία, της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο O του κύκλου, και την ονομάζουμε $\hat{xOy}$. Η γωνία αυτή λέγεται **επίκεντρη γωνία**.

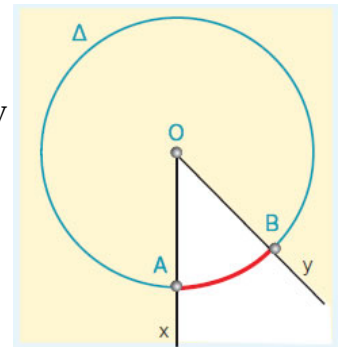
«ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ» ΤΟΞΑ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ ΓΩΝΙΑΣ:

Αν η πλευρά Ox της γωνίας $\hat{xOy}$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο A και η πλευρά Oy στο σημείο B , τότε η επίκεντρη αυτή γωνία ορίζει στον κύκλο 2 τόξα τα οποία είναι τα εξής:

- 1.) Το τόξο $\widehat{AGB}$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας $\hat{xOy}$ (κυρτές είναι οι γωνίες που είναι μικρότερες από 180°) λέγεται **αντίστοιχο κυρτό τόξο** της επίκεντρης γωνίας $\hat{xOy}$.



- 2.) Το τόξο $\widehat{ADB}$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της μη κυρτής γωνίας $\hat{xOy}$ είναι κι αυτό **αντίστοιχο μη κυρτό τόξο** της μη κυρτής επίκεντρης γωνίας $\hat{xOy}$.

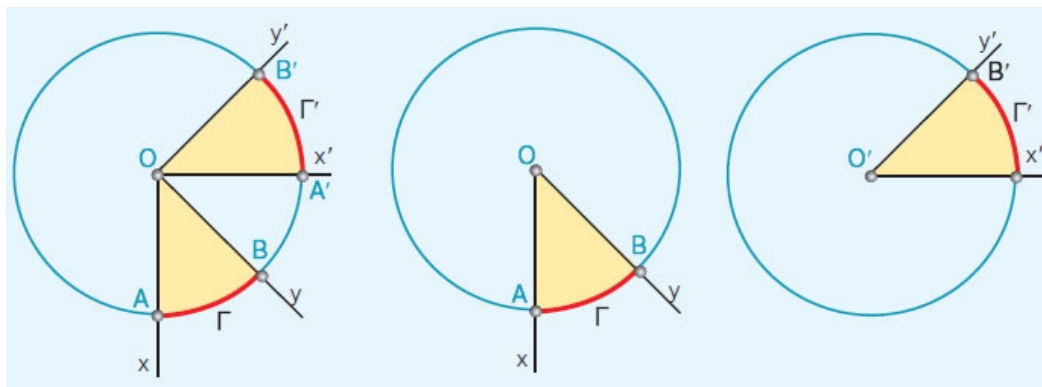


Σχέση επίκεντρης και του «αντίστοιχου» τόξου

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ως μέτρο «καμπυλότητας» ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, δηλαδή το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες, και έτσι ισχύει το εξής βασικό

ΘΕΩΡΗΜΑ:

- Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δυο ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα. Και αντίστροφα:
- Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δυο ίσα τόξα έχουν ίσες τις επίκεντρες γωνίες.



ΑΡΑ γενικά ισχύει ότι:

Σε ίσους κύκλους ή στον ίδιο κύκλο ισχύει: **Ίσες επίκεντρες $\Leftrightarrow$ Ίσα τόξα $\Leftrightarrow$ Ίσες χορδές.**

!!! ΣΧΟΛΙΟ: Επειδή μια πλήρης επίκεντρη γωνία είναι μια γωνία ίση με 360° που αντιστοιχεί σε έναν πλήρη κύκλο $\rightarrow$ Ένα τόξο ολόκληρου κύκλου θα έχει μέτρο (καμπυλότητας) και αυτό 360° .

Μέτρηση καμπυλότητας τόξου - Μονάδες μέτρησης «καμπυλότητας» τόξων.

Για την μέτρηση των γωνιών και των τόξων χρησιμοποιούμε την ίδια μονάδα μέτρησης, την μοίρα.

$\rightarrow$ Η 1° μοίρα ορίζεται ως το ένα από τα 360 ίσα μέρη ενός κύκλου.

Βλέπουμε ότι το μοιρογνώνιο είναι ένα ημικύκλιο χωρισμένο σε 180 ίσα τόξα κομμάτια ή 180° .

Θυμίζουμε: Μονάδες μέτρησης γωνιών (άρα και καμπυλότητας τόξων)

1° $60'$ (Λεπτά της μοίρας) $60''$ (δευτερόλεπτα της μοίρας) $\rightarrow \times 60$ $: 60 \leftarrow$

π.χ. α) $1^\circ = 1^\circ \cdot 60 = 60' = 60 \cdot 60 = 3600''$.

β) Αν $\omega = 20^\circ 35'$, τότε $\omega = 20^\circ \cdot 60 + 35' = 1200' + 35' = 1235'$.

Το αποτέλεσμα της μέτρησης λέγεται **μέτρο (καμπυλότητας)**. π.χ. ένα τόξο 30° λέμε ότι έχει μέτρο (καμπυλότητας) 30 μοίρες.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η καμπυλότητα ενός τόξου που μετράμε σε μοίρες όπως είδαμε ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΚΑΜΙΑ ΣΧΕΣΗ με το ΜΗΚΟΣ του τόξου που το μετράμε σε μονάδες μήκους!

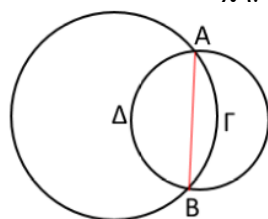
ΠΡΟΣΟΧΗ:

1) Δύο τόξα που βρίσκονται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους **μπορούν να συγκριθούν** και θα είναι **ίσα** ή **άνισα**.

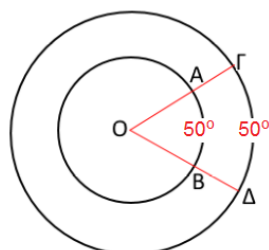
2) Δύο τόξα που βρίσκονται σε άνισους κύκλους **δεν συγκρίνονται**. **Ούτε ίσα, ούτε άνισα!**

Δύο σχήματα είναι ίσα, αν τοποθετήσουμε το ένα πάνω στο άλλο και συμπίσουν ακριβώς. Τα τόξα ΑΓΒ και ΑΔΒ του παρακάτω σχήματος 1 έχουν τα ίδια άκρα, αλλά δεν είναι ίσα.

Τα τόξα ΑΒ και ΓΔ του σχήματος 2 έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά δεν είναι ίσα.



Σχήμα 1.



Σχήμα 2.

π.χ. Δύο διάμετροι ενός κύκλου σχηματίζουν γωνία 60° . Να βρεις πόσες μοίρες είναι κάθε ένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από αυτές τις διαμέτρους του.

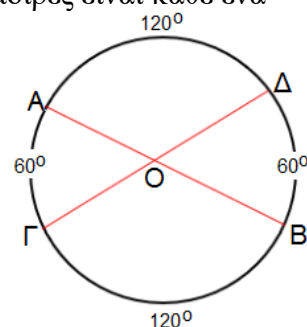
Θυμίζουμε: Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου.

Αν $\widehat{ΑΟΓ} = 60^\circ$, τότε και $\widehat{ΒΟΔ} = 60^\circ$, ως κατακορυφήν.

Άρα και τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{ΑΓ}$ και $\widehat{ΒΔ}$ θα έχουν το ίδιο μέτρο.

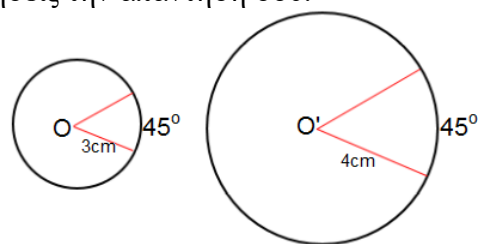
$\widehat{ΑΟΔ} = 120^\circ$, ως εφεξής και παραπληρωματική της $\widehat{ΑΟΓ}$.

Τότε $\widehat{ΒΟΓ} = 120^\circ$, ως κατακορυφήν της $\widehat{ΑΟΔ}$. Άρα και τα αντίστοιχα τόξα ΑΔ και ΒΓ θα έχουν το ίδιο μέτρο.



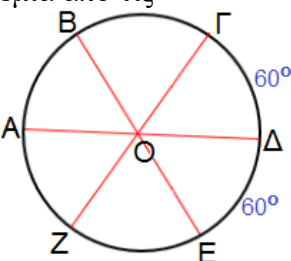
π.χ. Σχεδιάσε δύο κύκλους (O, 3 cm) και (O', 4 cm). Να ορίσεις στον κάθε κύκλο από ένα τόξο 45° και να εξετάσεις εάν τα τόξα αυτά είναι ίσα. Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.

Τα τόξα έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά **δεν είναι ίσα**, διότι βρίσκονται σε άνισους κύκλους.



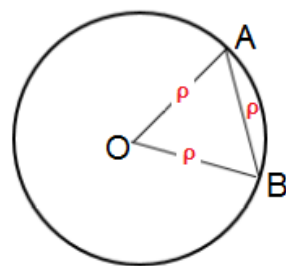
π.χ. Τρεις διάμετροι χωρίζουν έναν κύκλο σε έξι ίσα τόξα. Πόσων μοιρών είναι καθεμιά από τις έξι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν στα τόξα αυτά;

Αφού ο κύκλος έχει 360° και τα τόξα είναι ίσα, το καθένα θα έχει μέτρο $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.



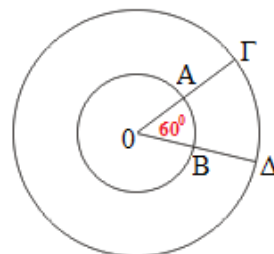
π.χ. Σ' έναν κύκλο (O, ρ) να χαράξεις μία χορδή AB ίση με την ακτίνα του κύκλου. Να υπολογίσεις σε μοίρες την επίκεντρη γωνία AÔB και να βρεις σε ποιο κλάσμα του κύκλου αντιστοιχεί το κυρτό τόξο $\widehat{AB}$.

Είναι OA=OB=AB=ρ, άρα το τρίγωνο AOB είναι ισόπλευρο με την γωνία Ô=60°, επομένως και το τόξο $\widehat{AB}=60^\circ$. και αντιστοιχεί στο $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ του κύκλου.

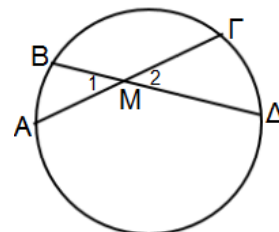


π.χ. Αν η γωνία O είναι 60°, τότε τα τόξα είναι ίσα, Σ ή Λ;

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = 60^\circ \\ \widehat{ΓΔ} = 60^\circ \end{array} \right\}, \text{ ΑΛΛΑ...}$$



π.χ. Οι γωνίες M₁ και M₂ είναι ίσες ως κατακορυφήν. Άρα τα τόξα AB και ΓΔ είναι ίσα. Σ ή Λ;



π.χ. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις επίκεντρες γωνίες και τα τόξα.

