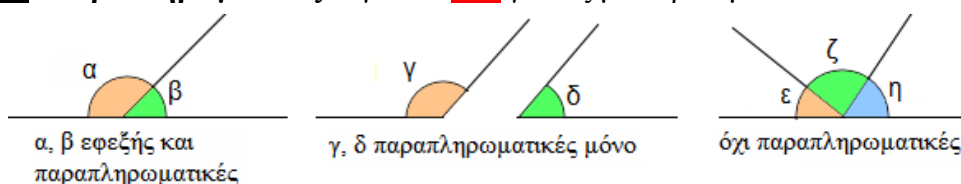
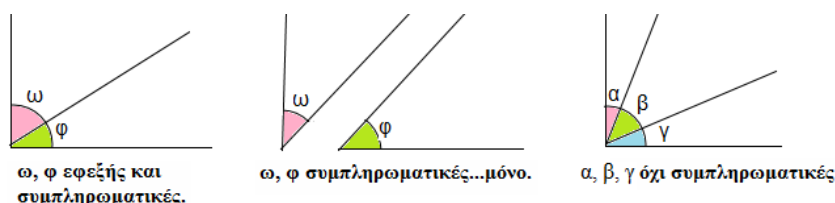


Παραπληρωματικές, Συμπληρωματικές γωνίες και κατακορυφήν γωνίες.

Ορισμός: Παραπληρωματικές λέγονται **δύο** γωνίες με άθροισμα 180° .

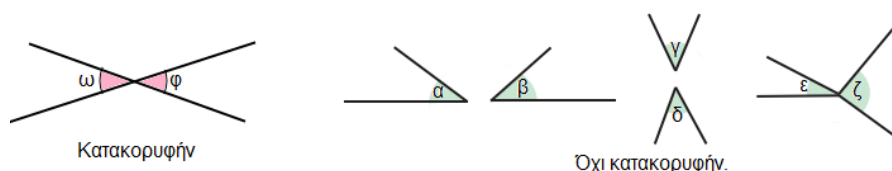


Ορισμός: Συμπληρωματικές λέγονται **δύο** γωνίες με άθροισμα 90° .



Ορισμός: Κατακορυφήν λέγονται δύο γωνίες, όπου οι πλευρές της μιας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης.

Δηλαδή: Οι πλευρές της μιας γωνίας «επεκτείνονται» προς την κορυφή και σχηματίζουν την άλλη γωνία.

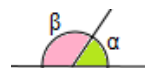


ΘΕΩΡΗΜΑ: Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

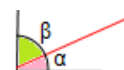
ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

Αν σας ζητούν να υπολογίσετε μια γωνία, ψάξτε να βρείτε αν είναι:

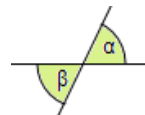
α) Παραπληρωματική μιας άλλης. $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$.



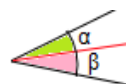
β) Συμπληρωματική μιας άλλης. $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$.



γ) Κατακορυφήν μιας άλλης. $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.



δ) Ίση με άλλη λόγω διχοτόμου. $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

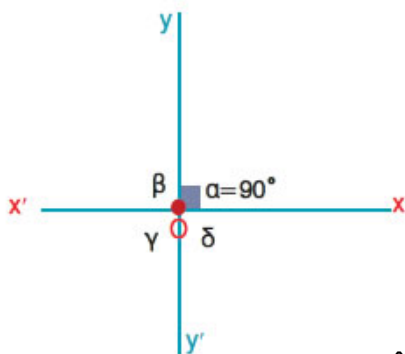


ε) Προσκειμένη στη βάση ισοσκελούς ή ισοπλεύρου τριγώνου. $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.



Εφαρμογή: Να δικαιολογηθεί γιατί δύο κάθετες ευθείες σχηματίζουν τέσσερις ορθές γωνίες.

Λύση



Σχεδιάζουμε μια ορθή γωνία $\hat{xOy}$ (με μέτρο $\hat{\alpha} = 90^\circ$) και προεκτείνουμε τις πλευρές της προς το μέρος της κορυφής της, οπότε έχουμε δύο κάθετες ευθείες $x'x$ και $y'y$.

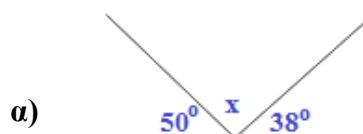
Επειδή οι γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'Oy'}$ είναι κατακορυφήν, θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 90^\circ$.

Οι γωνίες, όμως, $\hat{x'Oy}$ και $\hat{xOy'}$ είναι παραπληρωματικές, άρα θα είναι: $\hat{\beta} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

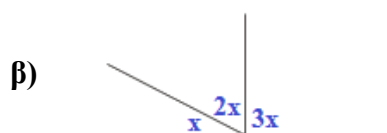
Αλλά οι γωνίες $\hat{x'Oy}$ και $\hat{xOy'}$ είναι κατακορυφήν, οπότε: $\hat{\beta} = \hat{\delta} = 90^\circ$

Επομένως βλέπουμε ότι: $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = 90^\circ$

π.χ. Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{x}$ στα παρακάτω σχήματα.



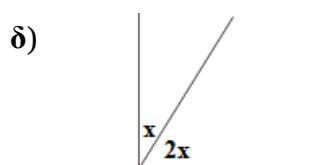
Πρέπει $50^\circ + \hat{x} + 38^\circ = 180^\circ$. Άρα $x = 92^\circ$.



Πρέπει $\hat{x} + 2\hat{x} + 3\hat{x} = 180^\circ$
 $\Rightarrow (1+2+3)\hat{x} = 180^\circ$ (επιμεριστική ιδιότητα)
 $\Rightarrow 6\hat{x} = 180^\circ$
 Άρα $x = 30^\circ$.



Πρέπει $\hat{x} + 90^\circ + 24^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow \hat{x} + 114^\circ = 180^\circ$
 Άρα $x = 66^\circ$.



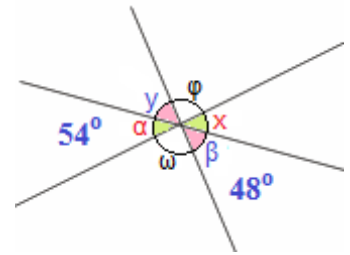
Πρέπει $\hat{x} + 2\hat{x} = 90^\circ$
 $\Rightarrow (1+2)\hat{x} = 90^\circ$ (επιμεριστική ιδιότητα)
 $\Rightarrow 3\hat{x} = 90^\circ$
 Άρα $x = 30^\circ$

π.χ. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Γωνία ω	1°	15°	45°	$60^\circ 34'$	90°	100°
Συμπληρωματική της ω						
Παραπληρωματική της ω						
Κατακορυφήν της ω						

π.χ. Αν $\hat{\alpha}=54^\circ$ και $\hat{\beta}=48^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$.

- Η γωνία $\hat{x}$ είναι **54°** , ως κατακορυφήν της $\hat{\alpha}$.
- Η γωνία $\hat{y}$ είναι **48°** , ως κατακορυφήν της $\hat{\beta}$.
- Οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\beta}$ έχουν άθροισμα 180° .
Άρα $\hat{\omega}=180^\circ-54^\circ-48^\circ=78^\circ$.
- Η γωνία $\hat{\phi}$ είναι **78°** , ως κατακορυφήν της $\hat{\omega}$.



π.χ. Αν $\hat{A\hat{O}B}=50^\circ$, να υπολογίσετε:

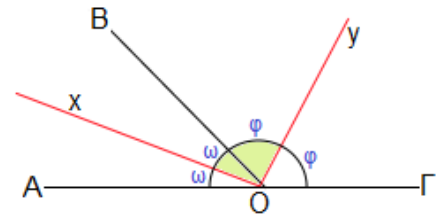
- α) Την γωνία $B\hat{O}\Gamma$.
β) Την γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι Ox , Oy .

α) Οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

Άρα $B\hat{O}\Gamma=180^\circ-50^\circ=130^\circ$.

β) Η γωνία $\hat{\omega}$ είναι το μισό της $A\hat{O}B$. Άρα $\hat{\omega}=25^\circ$.

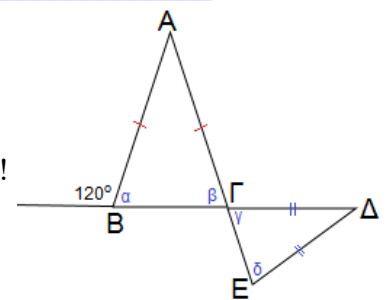
Η γωνία $\hat{\phi}$ είναι το μισό της $B\hat{O}\Gamma$. Άρα $\hat{\phi}=65^\circ$. Επομένως $x\hat{O}y=\hat{\omega}+\hat{\phi}=25^\circ+65^\circ=90^\circ$.



π.χ. Να υπολογίσετε τις γωνίες α , β , γ , δ του σχήματος:

Σχόλιο: Βλέπετε τα "σημαδάκια" πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα;

Αυτά δηλώνουν ότι τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα!!



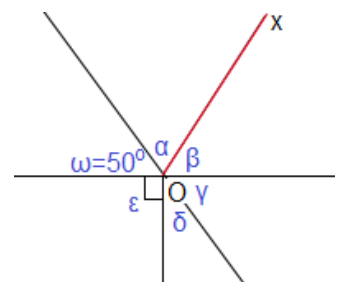
Άρα εδώ σημαίνει ότι τα AB και AG είναι ίσα $\rightarrow$ άρα το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές.
Το ίδιο ισχύει στο τρίγωνο ΔGE .

Υπόδειξη: Για καλύτερη διατύπωση της λύσης "βαφτίζουμε" $\hat{\omega}$ την γωνία 120° .

- Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματική της $\hat{\omega}$. Άρα $\hat{\alpha}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.
- Η γωνία β είναι ίση με την $\hat{\alpha}$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς ΔBG . Άρα **$\beta=60^\circ$** .
- Η γωνία γ είναι ίση με την $\hat{\beta}$, ως κατακορυφήν. Άρα **$\gamma=60^\circ$** .
- Η γωνία δ είναι ίση με την γ , ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς ΔGE . Άρα **$\delta=60^\circ$** .

π.χ. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\epsilon}$ του σχήματος, αν η Ox είναι διχοτόμος.

- Η $\hat{\epsilon}$ ισούται με...(1).
- $50^\circ+\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^\circ$, άρα $\hat{\alpha}=\hat{\beta}=...$ (2).
- $\hat{\gamma}=...$ διότι είναι...(3).
- $\hat{\delta}=...$, διότι είναι...(4).



π.χ. Αν $\hat{A}\hat{O}\hat{B}=70^\circ$ και η $ΟΔ$ είναι διχοτόμος της, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

Επειδή η $ΟΔ$ είναι διχοτόμος πρέπει $\hat{\omega}=\hat{\phi}=35^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\omega}$ είναι παραπληρωματικές. Άρα $\hat{\alpha}=180^\circ-35^\circ=145^\circ$.

Για τον ίδιο λόγο και $\hat{\beta}=145^\circ$.

