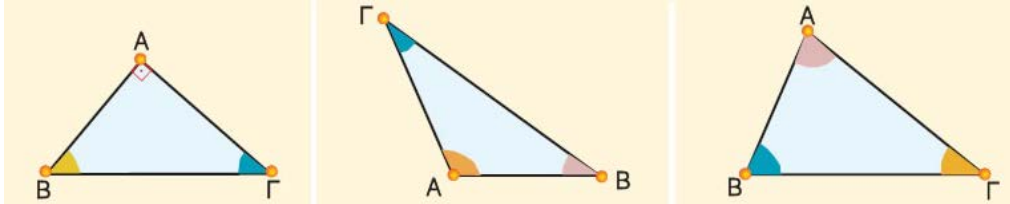


Άθροισμα (εσωτερικών) γωνιών τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το άθροισμα όλων των (εσωτερικών) γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180° .

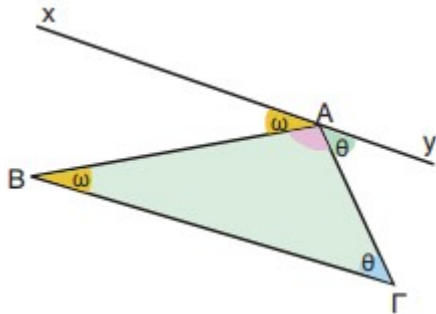
Αντιπαράθεση: Για όλα (τα παρακάτω) τρίγωνα ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$



Απόδειξη

Σχόλιο: Πολλές φορές στη Γεωμετρία φέρνουμε γραμμές στο σχήμα που δεν υπάρχουν για να μας βοηθήσουν να λύσουμε – αποδείξουμε κάτι. Αυτές λέγονται βοηθητικές γραμμές. Εδώ θα κάνουμε χρήση μιας τέτοιας γραμμής.

Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Επιλέγουμε μια κορυφή (έστω την A) και φέρνουμε βοηθητική ευθεία που να περνάει από το A και να είναι παράλληλη προς την απέναντι πλευρά της A , την $B\Gamma$.



Τότε έχουμε ότι: $\hat{B} = \hat{\omega}$ (ως εντός εναλλάξ με $B\Gamma // xAy$ και τέμνουσα την AB)

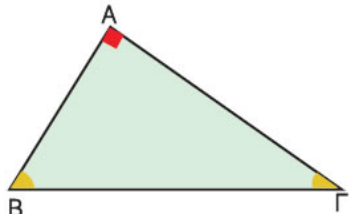
$\hat{\Gamma} = \hat{\theta}$ (ως εντός εναλλάξ με $B\Gamma // xAy$ και τέμνουσα την $A\Gamma$)

Αλλά ισχύει ότι $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\theta} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ: Με τη χρήση του προηγούμενου πολύ βασικού θεωρήματος μπορούμε να βρίσκουμε μια από τις 3 γωνίες του τριγώνου αν ξέρουμε τις άλλες 2!

Βασικές Εφαρμογές:

1. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.

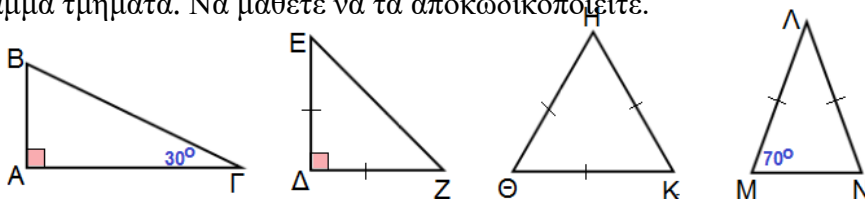


Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$

Επειδή είναι: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ θα έχουμε: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ$ άρα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$

Γνωρίζουμε, ότι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° λέγονται **συμπληρωματικές**. Άρα, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές.

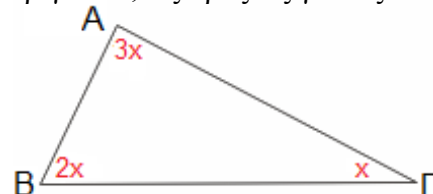
2. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες στα παρακάτω τρίγωνα. Τα "σημαδάκια" δείχνουν ίσα ευθύγραμμά τμήματα. Να μάθετε να τα αποκωδικοποιείτε.



- Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **ορθογώνιο**, άρα **$\hat{A}=90^\circ$** . Τότε :
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow 120^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 120^\circ = \mathbf{60^\circ}$.
- Το τρίγωνο ΔΕΖ είναι **ορθογώνιο και ισοσκελές (βάση την ΕΖ)**, άρα **$\hat{A}=90^\circ$** και οι γωνίες Ε και Ζ θα είναι ίσες, άρα $E=Z$.
 Τότε $\Delta + E + Z = 180^\circ$
 $\Rightarrow 90^\circ + E + Z = 180^\circ \quad (E=Z)$
 $\Rightarrow 90^\circ + 1 \cdot E + 1 \cdot E = 180^\circ$
 $\Rightarrow 90^\circ + (1+1)E = 180^\circ \quad (\text{επιμεριστική ιδιότητα})$
 $\Rightarrow 90^\circ + 2E = 180^\circ$
 $\Rightarrow 2E = 180^\circ - 90^\circ$
 $\Rightarrow 2E = 90^\circ$
 $\Rightarrow E = 90^\circ : 2 = 45^\circ$, άρα και **$E=Z=45^\circ$** .
- Το τρίγωνο ΗΘΚ είναι **ισόπλευρο**, άρα για ευκολία θέτω: $H=\Theta=K=x$.
 Τότε $H+\Theta+K = 180^\circ \Rightarrow x+x+x=180^\circ \Rightarrow (1+1+1)x=180^\circ \Rightarrow 3x=180^\circ \Rightarrow x=180^\circ:3=60^\circ$
 Επομένως **$H=\Theta=K=60^\circ$** , άρα οι γωνίες ενός **ισόπλευρου τριγώνου** είναι όλες ίσες με **60°** .
- Το τρίγωνο ΛΜΝ είναι **ισοσκελές**, άρα **$M=N=70^\circ$** .
 Τότε $\Lambda + M + N = 180^\circ \Rightarrow \Lambda + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow \Lambda + 140^\circ = 180^\circ$ άρα **$\Lambda = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$** .

π.χ. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογίσετε το x και το είδος του τριγώνου, ως προς τις γωνίες.

- Γνωρίζουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 3x + 2x + x = 180^\circ$
 $\Rightarrow (3+2+1)x = 180^\circ$
 $\Rightarrow 6x = 180$ άρα $x = 180^\circ:6$
- Επομένως $\hat{\Gamma} = x = \mathbf{30^\circ}$
 $\hat{A} = 3x = 3 \cdot 30^\circ = \mathbf{90^\circ}$
 $\hat{B} = 2x = 2 \cdot 30^\circ = \mathbf{60^\circ}$. Το τρίγωνο είναι Ορθογώνιο.



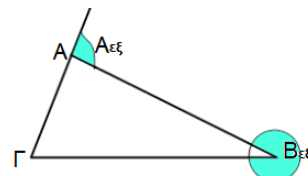
π.χ. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές όπου αυτό είναι δυνατόν, στις παρακάτω περιπτώσεις:

- | | | |
|---|--|--|
| α) $\hat{A}=45^\circ, \hat{B}=63^\circ$. | β) $\hat{B}=38^\circ, \hat{\Gamma}=52^\circ$. | γ) $\hat{A}=24^\circ, \hat{\Gamma}=43^\circ$. |
| δ) $\hat{A}=50^\circ, \hat{B}=65^\circ$. | ε) $\hat{A}=90^\circ, \hat{B}=45^\circ$. | στ) $\hat{A}=90^\circ, \hat{B}=145^\circ$ |

- α) $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 72^\circ$, άρα είναι **οξυγώνιο**.
 β) $\hat{A} = 180^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{B} = 90^\circ$, άρα είναι **ορθογώνιο στο Α**.
 γ) $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{\Gamma} = 113^\circ$, άρα είναι **αμβλυγώνιο στο Β**.
 δ) $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 65^\circ$, άρα είναι **ισοσκελές με κορυφή το Α**.
 ε) $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 45^\circ$, άρα είναι **ορθογώνιο και ισοσκελές**.
 στ) **Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο**. Γιατί το άθροισμα 2 μόνο γωνιών του είναι μεγαλύτερο από 180°

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η Εξωτερική γωνία ενός τριγώνου σχηματίζεται από την προέκταση μιας πλευράς και τη γειτονική πλευρά αυτής και είναι **παραπληρωματική** της αντίστοιχης εσωτερικής.

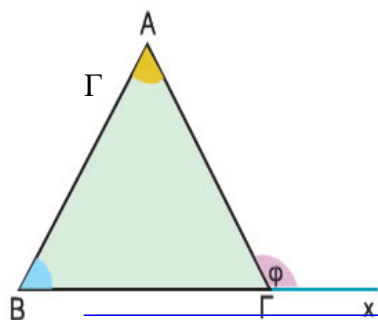
Δηλαδή: Στο διπλανό σχήμα η $A_{εξ}$ είναι εξωτερική γωνία.
Και ισχύει $A_{εσωτ.} + A_{εξ} = 180^\circ$



ΠΡΟΣΟΧΗ: Η $B_{εξ}$ **δεν είναι** εξωτερική γωνία του τριγώνου!

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική της τρίτης γωνίας.

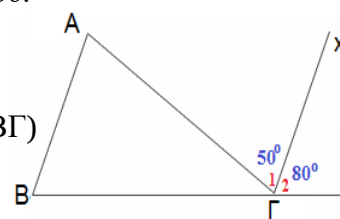
Απόδειξη



Η εξωτερική γωνία $\hat{\phi}$ είναι παραπληρωματική της εσωτερικής γωνίας του τριγώνου, δηλαδή θα είναι $\hat{\phi} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\phi} = 180^\circ - \hat{\Gamma}$
Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, άρα $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma}$
δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = \hat{\phi}$
Άρα, η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου.

π.χ. Αν η Γx είναι παράλληλη στην AB, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

- $\hat{A} = 50^\circ$, ως εντός εναλλάξ με την $\hat{\Gamma}_1$. (AB//Γx, τέμνουσα ΑΓ)
- $\hat{B} = 80^\circ$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά με την $\hat{\Gamma}_2$. (AB//Γx, τέμνουσα ΒΓ)
- $\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{\Gamma}_1 - \hat{\Gamma}_2 = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$.



π.χ. Δίνεται το διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ.

- Να υπολογίσετε την γωνία Α.
- Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου.

α) Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή
 $\Rightarrow \hat{A} + 60^\circ + 24^\circ = 180^\circ$ άρα **$\hat{A} = 96^\circ$** .

β) Θα εξετάσουμε αν $A_1 = A_2$??

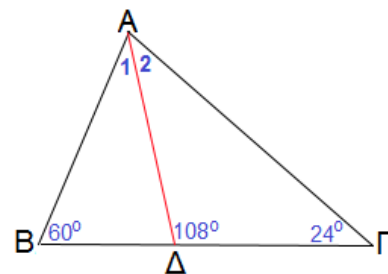
Αρχικά έχουμε $\Delta_1 + 108^\circ = 180^\circ \Rightarrow \Delta_1 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

Αρά στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε: $A_1 + B + \Delta_1 = 180^\circ$

$\Rightarrow A_1 = 180^\circ - B - \Delta_1 = 180^\circ - 60^\circ - 72^\circ = 48^\circ$

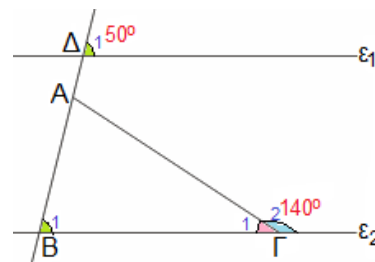
Όμως $A_1 + A_2 = \hat{A} \Rightarrow 48^\circ + A_2 = 96^\circ \Rightarrow A_2 = 96^\circ - 48^\circ = 48^\circ$

Όπότε $A_1 = 48^\circ$ και $A_2 = 48^\circ$ οπότε η ΑΔ δεν είναι διχοτόμος της Γωνίας $\hat{A}$



π.χ. Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

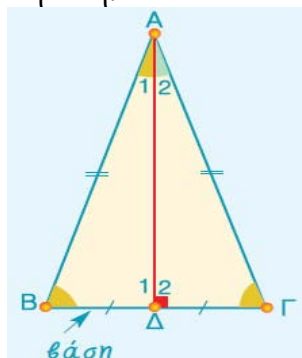
- Η γωνία $B_1 = 50^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά με την Δ_1 .
- Η γωνία $\hat{\Gamma}_1 = 40^\circ$, ως παραπληρωματική της $\hat{\Gamma}_2$. (Εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ).
Γνωρίζουμε στο τρίγωνο ΑΒΓ ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \hat{A} + 50^\circ + 40^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow \hat{A} + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα **$\hat{A} = 90^\circ$** .



Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.

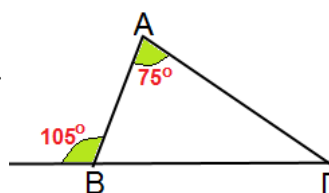
- 1) Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες
- 2) Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διχοτόμος και ύψος και άξονας συμμετρίας.

Δηλαδή:



$$1) \hat{B} = \hat{G}$$

- 2) Η ΑΔ αν είναι ύψος τότε είναι και διχοτόμος της $\hat{A}$ και διάμεσος της πλευράς ΒΓ (Άρα ΒΔ=ΔΓ). Και αντίστοιχα αν είναι διχοτόμος είναι και ύψος και διάμεσος, και αν είναι διάμεσος τότε είναι και ύψος και διχοτόμος



- π.χ.** α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.
β) Το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Σ ή Λ;

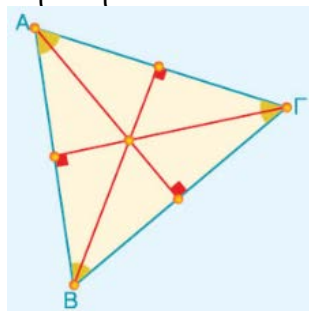
α) Επειδή η εξωτερική γωνία της Β είναι 105° η εσωτερική θα είναι 75° , ως παραπληρωματική της. Άρα βρίσκω τη Γ αφού: $A+B+G=180^\circ$, άρα $G=180^\circ-75^\circ-75^\circ=30^\circ$.

β) Αφού στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $A=75^\circ$ και $B_{\text{εσ}}=75^\circ$ **το τρίγωνο είναι Ισοσκελές**

Ιδιότητες ισοπλεύρου τριγώνου.

- 1) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους και γωνίες του είναι ίσες η κάθε μια με 60°
Δηλαδή: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{G} = 60^\circ$ (Γιατί??)
- 2) Κάθε διάμεσος είναι και διχοτόμος και ύψος και άξονας συμμετρίας (αφού κάθε πλευρά του είναι «σαν» ΒΑΣΗ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ)

Δηλαδή:



π.χ. Δίνεται το παρακάτω τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΜ.
- β) Να υπολογίσετε την γωνία Γ.
- γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Το ΑΒΜ είναι ισόπλευρο τρίγωνο, άρα $\hat{A}_1 = \hat{B} = \hat{M}_1 = 60^\circ$.

β) $\hat{M}_2 = 120^\circ$, ως παραπληρωματική της M_1 .

Το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές και $A_2 + M_2 + G = 180^\circ$ ή $x + x + G = 180^\circ$, άρα $x = A_2 = G = 30^\circ$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο αφού $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

