

Εμβαδά επιπέδων σχημάτων.

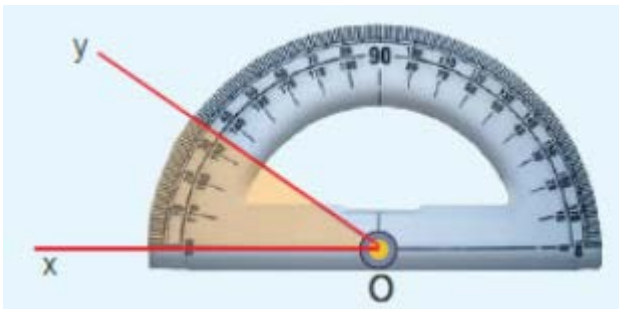
ΜΕΡΟΣ 1: ΓΩΝΙΕΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΥΤΩΝ

- 1.) **Μηδενική γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 0°

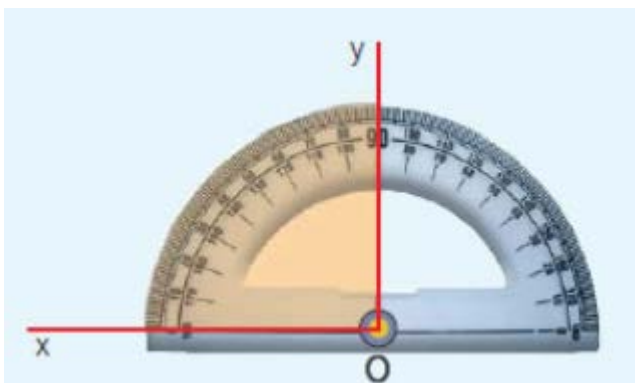


Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι η ημιευθεία της **τελικής πλευράς** μιας μηδενικής γωνίας **ταυτίζεται** με αυτή της **αρχικής πλευράς**.

- 2.) **Οξεία γωνία** λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μικρότερο των 90° (δηλαδή από 0° έως 90°)



- 3.) **Ορθή γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 90°



Σχόλιο: Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι **κάθετες ημιευθείες**

- 4.) **Αμβλεία γωνία** λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90° και μικρότερο των 180°

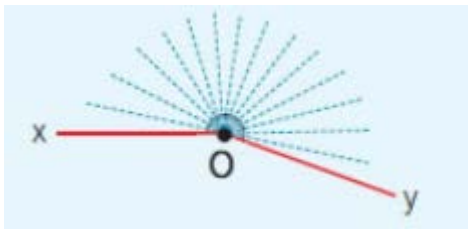


- 5.) **Ευθεία γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 180°

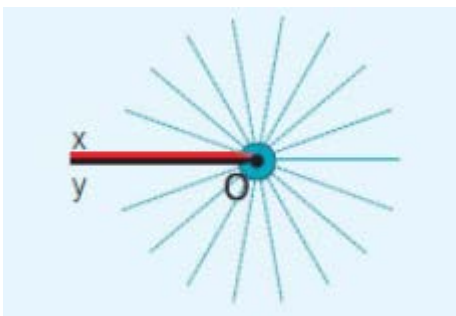


Σχόλιο: Οι πλευρές της ευθείας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες.

- 6.) **Μη κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 180° και μικρότερο των 360°



- 7.) **Πλήρης γωνία** λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 360°



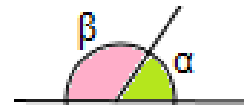
Σχόλιο: Η ημιευθεία της τελικής πλευράς μιας πλήρους γωνίας (όπως και της μηδενικής που είδαμε) ταυτίζεται με αυτή της αρχικής πλευράς.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

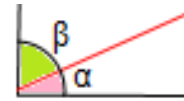
Είδη γωνιών	Μέτρο σε μοίρες
Μηδενική γωνία	0°
Οξεία	0° έως 90°
Ορθή	90°
Αμβλεία	90° έως 180°
Ευθεία γωνία	180°
Μη κυρτή	180° έως 360°
Πλήρης γωνία	360°

ΒΑΣΙΚΑ ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

α) **Παραπληρωματικές** είναι 2 γωνίες με άθροισμα μια ευθεία γωνία.
Δηλαδή $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ παραπληρωματικές ΑΝ ισχύει $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$



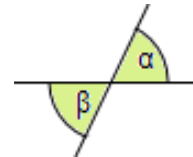
β) **Συμπληρωματικές** είναι 2 γωνίες με άθροισμα μια ορθή γωνία.
Δηλαδή $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ συμπληρωματικές ΑΝ ισχύει $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$



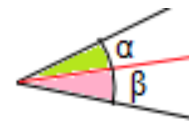
γ) **Κατακορυφήν** είναι 2 γωνίες που οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες (Ερώτημα: Ποιες ημιευθείες ονομάζονται αντικείμενες?)

Σχόλιο: 2 τεμνόμενες ευθείες σχηματίζουν πάντα 2 ζεύγη κατακόρυφη γωνιών.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Οι κατακορυφην γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες
Δηλαδή αν $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ κατακορυφήν τότε $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$



δ) Η διχοτόμος μια γωνίας είναι μια ημιευθεία που χωρίζει τη γωνία σε δυο ίσες γωνίες.



ΕΥΘΕΙΕΣ

ΘΕΣΕΙΣ 2 ΕΥΘΕΙΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Οι πιθανές θέσεις που μπορεί να πάρουν 2 ευθείες στο επίπεδο είναι :

1^{ον}) **Παράλληλες** που είναι δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο (Δεν τέμνονται ή αλλιώς δεν έχουν σημείο τομής.)

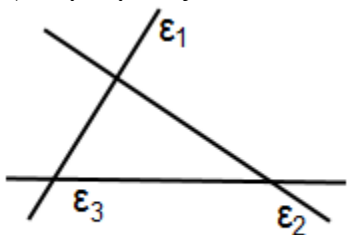
ε_1 _____

ε_2 _____

ε_3 _____

➔ Συμβολισμός: Αν οι ε_1 , ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες τότε αυτό το γράφω $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$

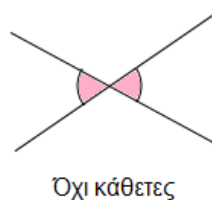
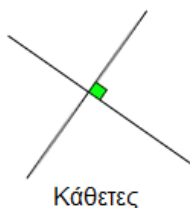
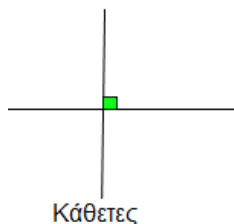
2^{ον}) Τεμνόμενες που είναι οι ευθείες που έχουν 1 κοινό σημείο (σημείο τομής)



ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ: Κάθετες ευθείες.

Κάθετες ευθείες λέγονται δύο ευθείες που τέμνονται και σχηματίζουν 4 ίσες γωνίες.

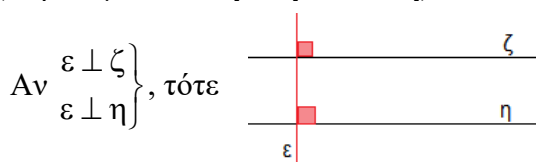
(Αν δεν είναι κάθετες και τέμνονται λέγονται **πλάγιες**).



ΘΕΩΡΗΜΑ:

Δύο ευθείες κάθετες σε μια τρίτη είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Άρα Για να **χαράξουμε** δύο **παράλληλες** ευθείες φέρνουμε κάθετες σε μία τρίτη ευθεία. (Φέρνουμε **κάθετη στην κάθετη**).



Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη και ζεύγη γωνιών που σχηματίζουν.

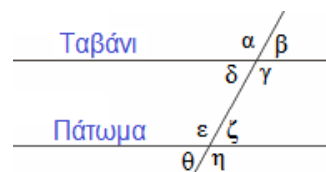
Δυο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη δημιουργούν ΖΕΥΓΗ γωνιών όπου η μια γωνία του ζεύγους να «πατάει» πάνω στην μια παράλληλη και η άλλη να «πατάει» πάνω στην άλλη.

- ➔ Ανάλογα με τη θέση που έχει το ζεύγος των γωνιών σε σχέση με τις παράλληλες τις χαρακτηρίζουμε αν είναι ΕΝΤΟΣ ή ΕΚΤΟΣ των παραλλήλων
- ➔ Ανάλογα με τη θέση που έχει το ζεύγος των γωνιών σε σχέση με την τέμνουσα τις χαρακτηρίζουμε αν είναι από την «ίδια πλευρά» της τέμνουσας : ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ ενώ αν είναι εκατέρωθεν της τέμνουσας : ΕΝΑΛΛΑΞ

!!! Τα παραπάνω είναι το όνομα και το επώνυμο του ζευγούς των γωνιών

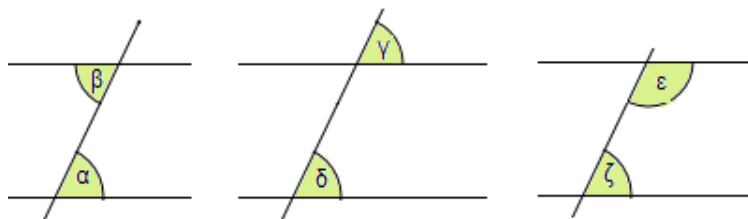
Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

- i) Εντός: δ, γ, ε, ζ.
- ii) Εκτός: α, β, θ, η.
- iii) Επί τα αυτά: β, γ, ζ, η και α, δ, ε, θ.
- iv) Εναλλάξ : α με την ζ (ή την η) και β με την ε (ή την θ) κλπ



Τα βασικότερα ζεύγη γωνιών που σχηματίζονται είναι τα εξής (πλέον με ονοματεπώνυμο!!):

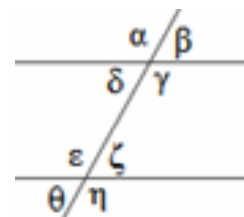
- i. Εντός και εναλλάξ. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$
- ii. εντός, εκτός και επί τα αυτά. $\hat{\gamma}, \hat{\delta}$
- iii. εντός και επί τα αυτά $\hat{\xi}, \hat{\epsilon}$



Οι παραπάνω ονομασίες όπως είπαμε ισχύουν όταν η μία γωνία ανήκει στο "ταβάνι"-ακουμπάει την μία παράλληλη και η άλλη γωνία στο "πάτωμα"-ακουμπάει στην άλλη παράλληλη.

ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ: Οι ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ γωνίες ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ!

Σχόλιο: Με βάση το παραπάνω θεώρημα, το θεώρημα των κατακορυφών γωνιών και τις παραπληρωματικές γωνίες αν μου δίνεται 1 από τις γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \theta, \eta$ → ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΒΡΩ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΗ!!!



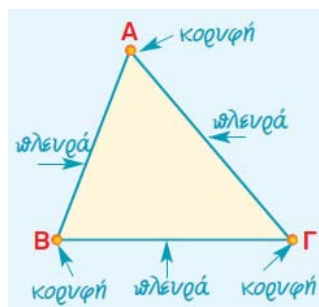
ΜΕΡΟΣ 2: ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ

I. ΤΡΙΓΩΝΑ

Ορισμός τριγώνου: Το κλειστό πολύγωνο που έχει 3 πλευρές που είναι ευθύγραμμά τμήματα ονομάζεται τρίγωνο.

ΒΑΣΙΚΑ στοιχεία τριγώνου:

1. Κορυφές
2. Γωνίες
3. Πλευρές



Είδη τριγώνων.

Τα Τρίγωνα κατατάσσονται σε 2 κατηγορίες.

1^η Κατηγορία: Με τη σχέση που έχουν οι πλευρές τους μεταξύ τους ως εξής
Ισοσκελές λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.

Ισόπλευρο λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Σκαληνό λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του διαφορετικές.

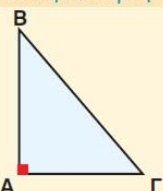
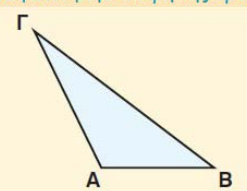
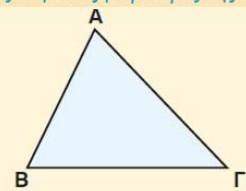
Ισότητα πλευρών		Ανισότητα πλευρών
Τρεις πλευρές ίσες	Δύο πλευρές ίσες	Όλες οι πλευρές άνισες

1^η Κατηγορία: Με τη σχέση που οι γωνίες του συγκρινόμενες με την ορθή γωνία.

Οξυγώνιο λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις γωνίες του οξείες.

Ορθογώνιο λέγεται το τρίγωνο που έχει μία ορθή γωνία.

Αμβλυγώνιο λέγεται το τρίγωνο που έχει μια αμβλεία γωνία.

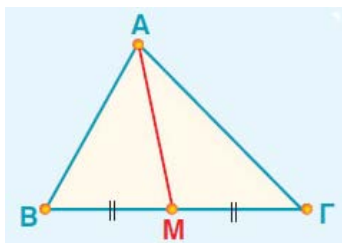
Πλευρές κάθετες	Όχι κάθετες πλευρές	
Μία γωνία ορθή	Μία γωνία μεγαλύτερη της ορθής	Όλες οι γωνίες μικρότερες της ορθής
		
Ορθογώνιο	Αμβλυγώνιο	Οξυγώνιο

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα

Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές	Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες
Σκαληνό	Οξυγώνιο
Ισοσκελές	Ορθογώνιο
Ισόπλευρο	Αμβλυγώνιο

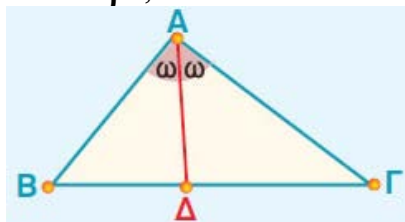
ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ στοιχεία τριγώνου:

1. **Διάμεσος (πλευράς) τριγώνου** λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το **μέσον** της απέναντι πλευράς.



Προφανώς ένα τρίγωνο έχει τρεις διάμεσους. Αποδεικνύεται ότι αυτές τέμνονται ΟΛΕΣ στο ίδιο σημείο, που λέγεται **βαρύκεντρο**.

2. **Διχοτόμος (γωνίας) τριγώνου** λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε **από μια κορυφή** και **καταλήγει στην απέναντι πλευρά**,



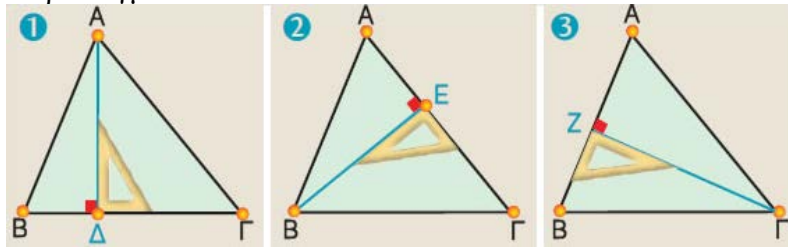
Ένα τρίγωνο έχει τρεις διχοτόμους (μια για κάθε γωνία του). Αποδεικνύεται ότι και οι τρεις τέμνονται στο ίδιο σημείο που λέγεται **έκκεντρο**.

3. Ύψος τριγώνου λέγεται το **κάθετο τμήμα** που φέρνουμε από μία κορυφή και αυτό καταλήγει **ΚΑΘΕΤΑ πάνω στην ευθεία που ορίζει η απέναντι πλευρά**.

Το ύψος ενός τριγώνου μπορεί να είναι «εσωτερικά-μέσα» στο τρίγωνο ή «εξωτερικά» από το τρίγωνο.

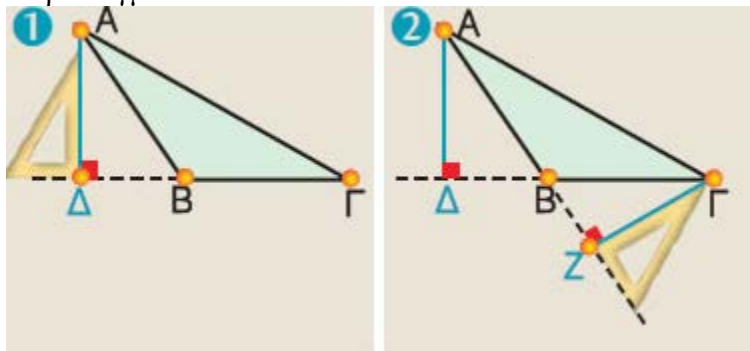
- ➔ Το ύψος είναι μέσα στο τρίγωνο όταν η απέναντι πλευρά που καταλήγει αυτό είναι πλευρά οξείας γωνίας του τριγώνου.

Παραδείγματα:

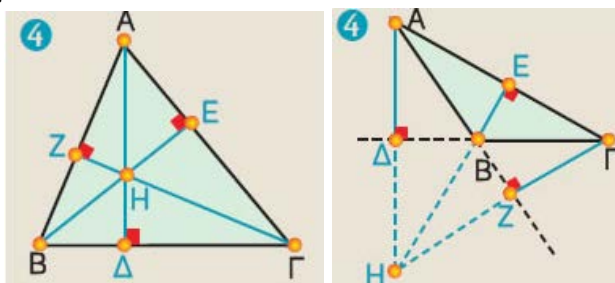


- ➔ Το ύψος είναι ΕΞΩ από το τρίγωνο όταν η απέναντι πλευρά που καταλήγει αυτό είναι πλευρά αμβλείας γωνίας του τριγώνου.

Παραδείγματα:



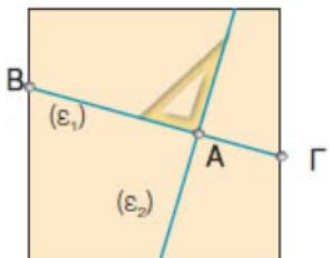
Ένα τρίγωνο έχει τρία ύψη που αποδεικνύεται ότι τέμνονται στο ίδιο σημείο που λέγεται **ορθόκεντρο**.



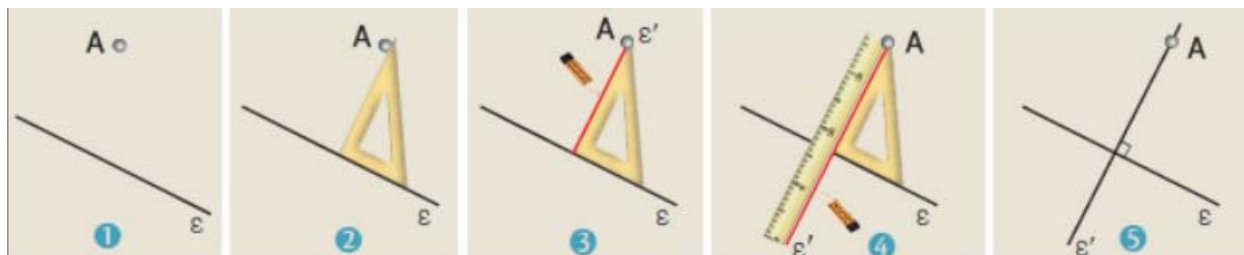
Όπως βλέπουμε το ορθόκεντρο μπορεί να είναι μέσα ή έξω από το τρίγωνο.

SOS!!! Για να μπορούμε να σχεδιάσουμε ύψη τριγώνων θυμίζουμε πως:

1. Κατασκευάζουμε Κάθετες ευθείες με τη βοήθεια του γνώμονα

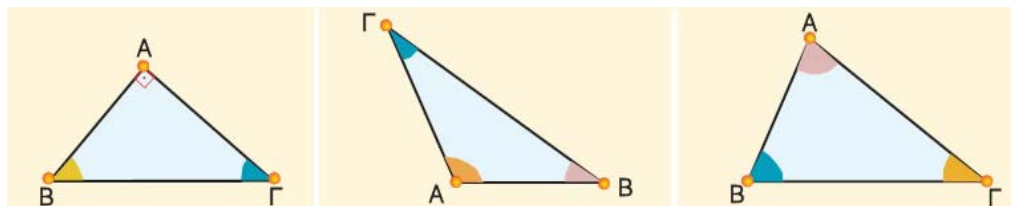


2. Από ένα σημείο A που δεν ανήκει σε μια ευθεία πως φέρνουμε κάθετη προς την ευθεία αυτή με τη βοήθεια του γνώμονα



!!! SOS-ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ :

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180° .

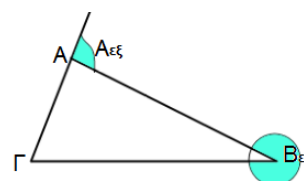


Σε κάθε τρίγωνο δηλαδή ισχύει : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΣΥΝΔΕΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ :

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η Εξωτερική γωνία ενός τριγώνου σχηματίζεται από την προεκτάση μιας πλευράς της και τη γειτονική πλευρά της εσωτερικής γωνίας και είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης εσωτερικής

Στο διπλανό σχήμα η $A_{εξ}$ είναι εξωτερική γωνία, άρα $A_{εσωτερική} + A_{εξωτερική} = 180^\circ$

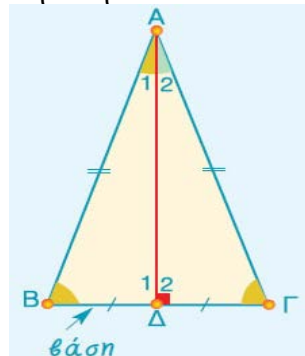


Σχόλιο: Η $B_{εξ}$ όπως σημειώνεται στο σχήμα **δεν** είναι εξωτερική της B!

Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου.

- 1) Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες
- 2) Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διχοτόμος και ύψος και άξονας συμμετρίας.

Δηλαδή:



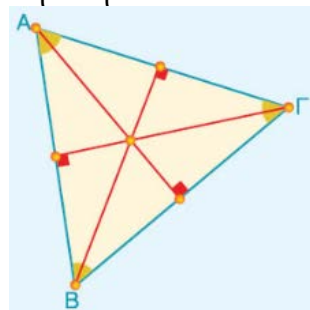
$$1) \hat{B} = \hat{G}$$

- 2) Η ΑΔ αν είναι ύψος τότε είναι και διχοτόμος της $\hat{A}$ και διάμεσος της πλευράς ΒΓ (Άρα ΒΔ=ΔΓ). Και αντίστοιχα αν είναι διχοτόμος είναι και ύψος και διάμεσος, και αν είναι διάμεσος τότε είναι και ύψος και διχοτόμος

Ιδιότητες ισοπλεύρου τριγώνου.

- 1) Όλες οι πλευρές και γωνίες του είναι ίσες και ίσες με 60° (Γιατί?) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{G} = 60^\circ$
- 2) Κάθε διάμεσος είναι και διχοτόμος και ύψος και άξονας συμμετρίας (αφού κάθε πλευρά του είναι «σαν» ΒΑΣΗ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ)

Δηλαδή:



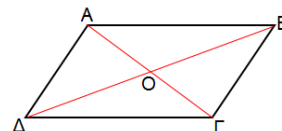
Παραλληλόγραμμο $\rightarrow$ Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο $\rightarrow$ Ρόμβος $\rightarrow$ Τετράγωνο

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Ιδιότητες:

- 1) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. Άρα $AB=ΔΓ$, $ΑΔ=ΒΓ$
- 2) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. $\hat{A} = \hat{Γ}$ και $\hat{B} = \hat{Δ}$
- 3) Οι διαγώνιές του διχοτομούνται (η μία διέρχεται από το μέσο της άλλης).

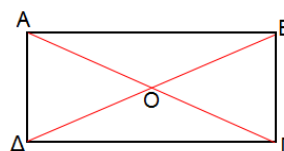
Δηλαδή Ο μέσο των ΔΒ και ΑΓ (άρα ΔΟ=ΟΒ και ΑΟ=ΟΓ)



Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.

Ιδιότητες: 1) Έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.

- 2) Οι διαγώνιες του είναι ίσες. $ΑΓ=ΒΔ$

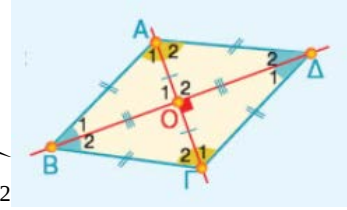


Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο, που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Ιδιότητες:

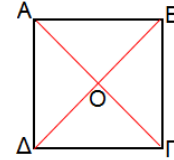
- 1) Έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- 2) Οι διαγώνιες είναι κάθετες. Δηλαδή $ΑΓ \perp ΒΔ$
- 3) Οι διαγώνιες είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

Πχ η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί την γωνία Β άρα $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$



Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές και τις γωνίες του ίσες.

- Ιδιότητες:**
- 1) Έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
 - 2) Έχει τις ιδιότητες του ορθογωνίου.
 - 3) Έχει τις ιδιότητες του ρόμβου.



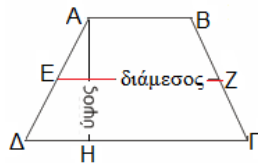
ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Τραπέζιο λέγεται το τετράπλευρο που έχει δύο παράλληλες πλευρές, που λέγονται βάσεις. (Σχήμα 1, δηλαδή $AB \parallel \Gamma\Delta$).

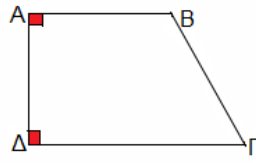
- ➔ Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ των 2 παράλληλων πλευρών του τραπέζιου (δηλαδή το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα πάνω στις βάσεις του με τα άκρα αυτού να είναι πάνω στις Βάσεις) λέγεται ΥΨΟΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ (Σχήμα 1 το ΑΗ)
- ➔ Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα ΜΕΣΑ των 2 μη παράλληλων πλευρών του τραπέζιου ονομάζεται διάμεσος (Σχήμα 1 το ΕΖ)

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο, που οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες. (Σχήμα 3, δηλαδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ ενώ $ΑΔ=ΒΓ$)

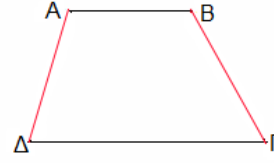
Ορθογώνιο τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο που έχει δύο διαδοχικές ορθές γωνίες όπου η μία είναι στη μία βάση και η άλλη στην άλλη βάση. (Σχήμα 2)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

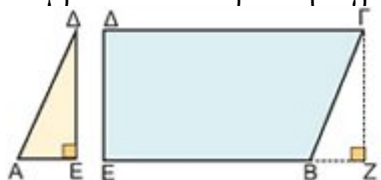
ΜΕΡΟΣ 2: ΤΥΠΟΙ ΕΜΒΑΔΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. ΕΜΒΑΔΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με βάση $AB = \beta = \Gamma\Delta$ και ας φέρουμε τα ύψη του $\Delta E = \upsilon$ και $\Gamma Z = \upsilon$.



Μεταφέροντας το τρίγωνο ΔE στη θέση τού (ίσου με αυτό) τριγώνου ΓZ , παρατηρούμε ότι: το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου $EZ\Gamma\Delta$.



Άρα: $(AB\Gamma\Delta) = (EZ\Gamma\Delta) = EZ \cdot \Gamma Z = \beta \cdot \upsilon$.

Γενικά:

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος. $E = \beta \cdot \upsilon$.

!!! Τα παρακάτω 2 και 3 προκύπτουν ΑΜΕΣΑ από το 1

2. ΕΜΒΑΔΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Το Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο είναι και αυτό παραλληλόγραμμο άρα αν δώ τη μια πλευρά του σαν βάση και την άλλη σαν ύψος τότε:

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές α, β ισούται με $E = \beta \cdot \upsilon = \alpha \cdot \beta$.

3. ΕΜΒΑΔΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Το τετράγωνο είναι και αυτό παραλληλόγραμμο άρα αν δώ τη μια πλευρά του σαν βάση και την άλλη σαν ύψος τότε:

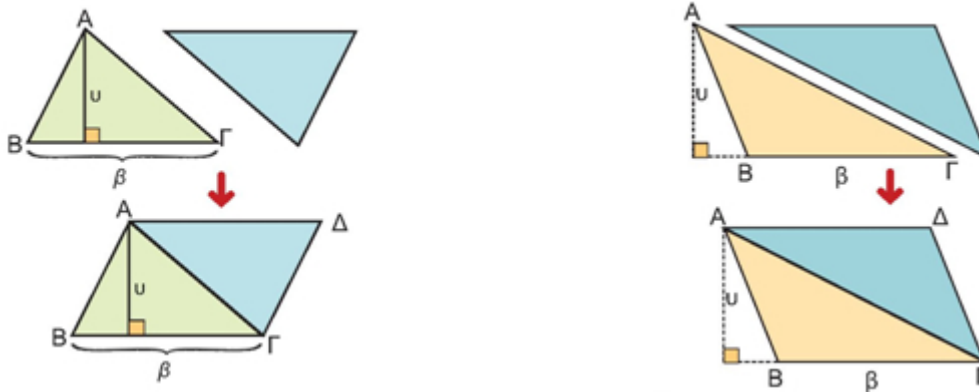
Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α ισούται με $E = \beta \cdot \upsilon = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$.

4. ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ που δεν είναι ορθογώνιο και ας πάρουμε και άλλο ένα τρίγωνο ίδιο με αυτό.

Αν τοποθετήσουμε το δεύτερο τρίγωνο δίπλα στο πρώτο, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, τότε θα σχηματιστεί ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, που θα έχει ως βάση β , τη βάση $B\Gamma$ του $AB\Gamma$ και ως ύψος u , το ύψος του $AB\Gamma$, από την κορυφή A .

Είτε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, είτε είναι αμβλυγώνιο, το εμβαδόν του θα είναι ίσο με το μισό του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ που σχηματίζεται, αν τοποθετήσουμε άλλο ένα τρίγωνο ίσο με το $AB\Gamma$, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



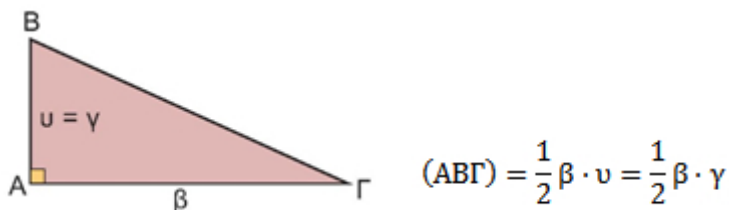
Επομένως, θα ισχύει: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \beta \cdot u$ όπου β η βάση του $AB\Gamma$ και u το αντίστοιχο ύψος.
Γενικά:

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

!!! Το παρακάτω 5 προκύπτει άμεσα από το 4

5. ΕΜΒΑΔΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και είναι και αυτό τρίγωνο άρα αν δώ τη μια πλευρά κάθετη πλευρά του σαν βάση και την άλλη κάθετη πλευρά του σαν ύψος τότε:

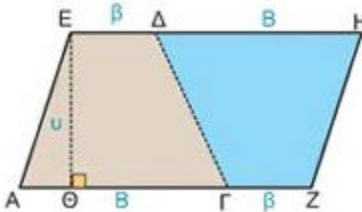


Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.

6. ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

Ας θεωρήσουμε το τραπέζιο ΑΓΔΕ που έχει μεγάλη βάση ΑΓ = Β, μικρή βάση ΕΔ = β και ύψος ΕΘ = υ.

Θεωρώντας άλλο ένα ίσο τραπέζιο με το ΑΓΔΕ σχηματίζουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΖΗΕ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το παραλληλόγραμμο που σχηματίσαμε έχει βάση (β + Β) και ύψος υ.

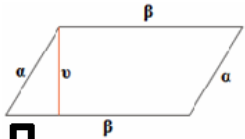
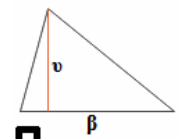
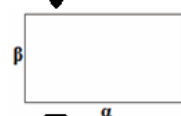
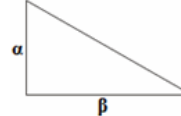
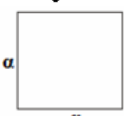
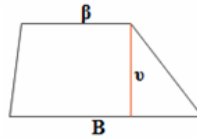
Επομένως: $(ΑΖΗΕ) = (β + Β) \cdot υ$.

Όμως: $(ΑΖΗΕ) = 2(ΑΓΔΕ)$

Άρα: $(ΑΓΔΕ) = \frac{(β + Β)υ}{2}$

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του με το ύψος του.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ:

Παραλληλόγραμμο $E = βυ$ $\Pi = 2υ + 2β$ 	Τρίγωνο $E = \frac{β \cdot υ}{2}$ $2τ = α + β + γ$ 
Ορθογώνιο $E = αβ$ $\Pi = 2α + 2β$ 	Ορθογώνιο τρίγωνο $E = \frac{α \cdot β}{2}$ 
Τετράγωνο $E = α^2$ $\Pi = 4α$ 	Τραπέζιο $E = \frac{(β + Β) \cdot υ}{2}$ 

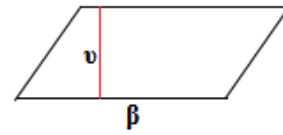
ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ: Για να λύσουμε μία άσκηση με εμβαδά φτιάχνουμε, οπωσδήποτε, **σχήμα** και γράφουμε τους **αντίστοιχους τύπους**. Αν υπάρχουν δεδομένα σε **διαφορετικές μονάδες**, τα μετατρέπουμε στην ίδια μονάδα.

π.χ. Ένα παραλληλόγραμμο έχει βάση $\beta=35$ cm και ύψος $υ=2,3$ dm. Να βρείτε το εμβαδόν του.

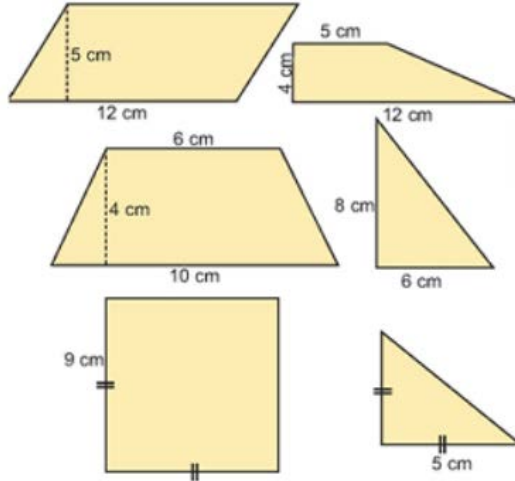
Πρέπει να μετατρέψουμε τα δεδομένα στην ίδια μονάδα, όποια θέλουμε, αν δεν μας το ζητούν.

$\beta=35$ cm.

$υ=2,3$ dm=23 cm. Άρα $E=35 \cdot 23=805$ cm².



π.χ. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων:



• $E_1 = 5 \cdot 12$, άρα $x=60$ cm².

• $E_2 = \frac{(5+12)4}{2}$, άρα $x=34$ cm²

• $E_3 = \frac{(6+10)4}{2}$, άρα $x=32$ cm²

• $E_4 = \frac{8 \cdot 6}{2}$, άρα $x=24$ cm²

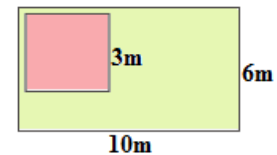
• $E_5 = 9^2$, άρα $x=81$ cm²

• $E_6 = \frac{5 \cdot 5}{2}$ άρα $x=12,5$ cm².

π.χ. Μία αγροικία, (ξέρετε τι είναι;) έχει δάπεδο, με σχήμα τετράγωνο και είναι κτισμένη σε οικοπέδο με διαστάσεις 10 m και 6m. Να βρείτε το εμβαδόν της αυλής.

Από το εμβαδόν του οικοπέδου, θα αφαιρέσουμε το εμβαδόν της αγροικίας.

Έχουμε: $E_{\text{αυλῆς}} = E_{\text{οικ.}} - E_{\text{αγρ}} = 10 \cdot 6 - 3^2 = 51$ m².



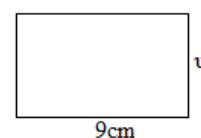
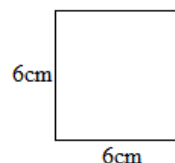
π.χ. Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο είναι ισεμβαδικά. Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 6 cm και η βάση του ορθογωνίου είναι 9 cm, να υπολογίσετε το ύψος του ορθογωνίου.

Πρέπει $E_{\text{τετρ}} = E_{\text{ορθ}}$.

$$a^2 = \beta \cdot υ \quad \text{ή}$$

$$6^2 = 9 \cdot υ \quad \text{ή}$$

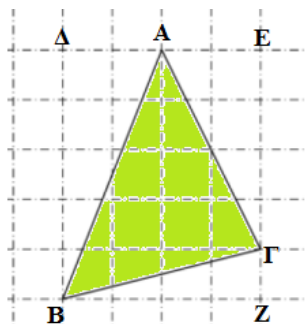
$$36 = 9 \cdot υ, \quad \text{άρα } υ=4 \text{ cm.}$$



π.χ. Αν γνωρίζουμε ότι κάθε τετράγωνο του διπλανού πλέγματος έχει πλευρά 1 cm, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

Από το εμβαδόν του ορθογωνίου BΔΕΖ θα αφαιρέσουμε το εμβαδόν των τριγώνων ABΔ, AΕΓ και BΓΖ, δηλαδή

$$\begin{aligned}(AB\Gamma) &= (B\Delta EZ) - (AB\Delta) - (A\Gamma E) - (B\Gamma Z) = \\ &= \Delta E \cdot \Delta B - \frac{A\Delta \cdot \Delta B}{2} - \frac{A\Gamma \cdot E\Gamma}{2} - \frac{B\Gamma \cdot Z\Gamma}{2} = \\ &= 4 \cdot 5 - \frac{2 \cdot 5}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} = \mathbf{9 \text{ cm}^2}.\end{aligned}$$

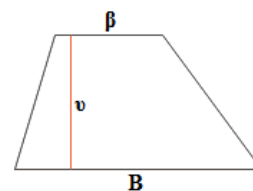


π.χ. Ενός τραπεζίου η μεγάλη βάση είναι 12 cm, η μικρή είναι τα $\frac{3}{4}$ της μεγάλης βάσης και το

ύψος είναι τα $\frac{2}{3}$ επίσης της μεγάλης βάσης. Να βρείτε το εμβαδόν του.

Έχουμε: $B=12 \text{ cm}$, $\beta = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9 \text{ cm}$, $\upsilon = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ cm}$.

$$\text{Άρα } E = \frac{(\beta + B)\upsilon}{2} = \frac{(9+12)8}{2} = \mathbf{84 \text{ cm}^2}.$$



π.χ. Οι βάσεις ενός τραπεζίου διαφέρουν κατά 3 cm και το ύψος του είναι 8 cm. Αν το εμβαδόν είναι 28 cm^2 , να βρείτε τις βάσεις του.

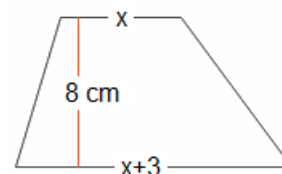
ΜΕΘΟΔΟΣ: Αν δύο δεδομένα συνδέονται μεταξύ τους, εργαζόμαστε με εξίσωση.

Ονομάζουμε x τη μικρή βάση, οπότε η μεγάλη θα είναι $x+3$.

$$\text{Επομένως: } E = \frac{(\beta + B)\upsilon}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{(x + x + 3) \cdot 8}{2} = 28 \quad \text{ή}$$

$$\frac{(2x+3) \cdot 8}{2} = 28 \quad \text{ή} \quad 16x + 24 = 2 \cdot 28 \quad \text{και τελικά } x = 2. \quad \text{Άρα}$$

$\beta = 2 \text{ cm}$ και $B = 5 \text{ cm}$.



π.χ. Το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι φτιαγμένο από τέσσερα ίδια ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Η περίμετρος του ABΓΔ είναι 28 cm. Να βρείτε

- Το μήκος της πλευράς AB.
- Το εμβαδόν του ABΓΔ.

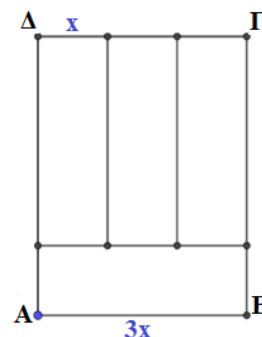
α) Προσέξτε ότι η μεγάλη πλευρά ενός από τα μικρά ορθογώνια είναι τριπλάσια από την μικρή;

Η περίμετρος του ABΓΔ είναι

$$P = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 3x + 4x + 3x + 4x = 14x.$$

Πρέπει $4x = 28$, άρα $x = 2 \text{ cm}$, οπότε $B\Gamma = 8 \text{ cm}$ και $AB = 6 \text{ cm}$.

β) Το εμβαδόν είναι $E = AB \cdot B\Gamma = 6 \cdot 8 = \mathbf{48 \text{ cm}^2}$.



π.χ. Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη συνέχεια να προεκτείνετε την πλευρά ΑΒ του τετραγώνου και να πάρετε τμήμα ΒΕ = ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ και το τρίγωνο ΑΕΔ έχουν ίσα εμβαδά.

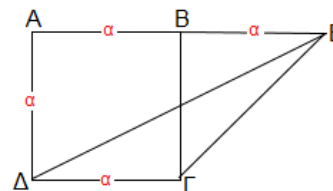
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΕΔ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του ΒΓΕ

Σχόλιο: Βαφτίζουμε τα ίσα τμήματα με το ίδιο γράμμα.

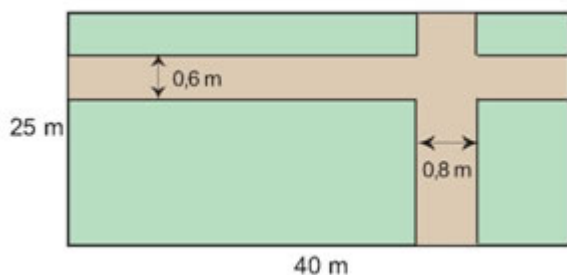
$$\alpha) (ΑΒΓΔ) = \alpha^2. (ΑΕΔ) = \frac{ΑΕ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{2\alpha \cdot \alpha}{2} = \alpha^2.$$

$$\beta) (ΑΕΔ) = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{2} = \frac{\alpha \cdot 2\alpha}{2} = \alpha^2.$$

$$(ΒΓΕ) = \frac{ΒΕ \cdot ΒΓ}{2} = \frac{\alpha \cdot \alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}. \text{ Άρα } (ΑΕΔ) = 2(ΒΓΕ).$$



π.χ. Ένας ορθογώνιος κήπος έχει διαστάσεις 40 m και 25 m. Τον κήπο διασχίζουν δύο κάθετα μεταξύ τους δρομάκια. Το ένα παράλληλο προς τη μεγάλη πλευρά του κήπου με πλάτος 0,6 m και το άλλο με πλάτος 0,8 m. Το υπόλοιπο τμήμα θα φυτευτεί με γκαζόν. Να υπολογίσετε το κόστος της κατασκευής του γκαζόν, αν ο γεωπόνος χρεώνει 12 € κάθε m² γκαζόν.



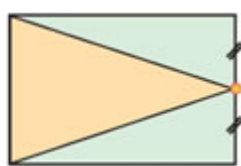
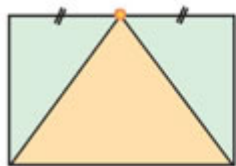
$$E_{\text{κηπ}} = 40 \cdot 25 = 1000 \text{ m}^2.$$

$$E_{\text{δρομ}} = 0,6 \cdot 40 + 0,8 \cdot 25 - 0,6 \cdot 0,8 = 24 + 20 - 0,48 = 43,52 \text{ m}^2. \text{ (Αφαιρούμε το κοινό μέρος των δύο...δρομακίων, γιατί το υπολογίζουμε δύο φορές). Άρα } E_{\text{γρασ}} = 1000 - 43,52 = 956,48 \text{ m}^2.$$

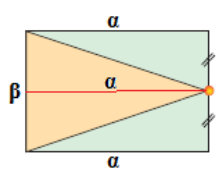
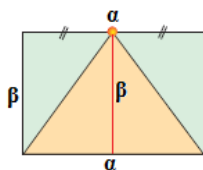
$$\text{Κόστος } K = 956,48 \cdot 12 = \mathbf{11477,76 \text{ €}}.$$

π.χ.

Τα παρακάτω ορθογώνια έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Εξηγήστε γιατί τα πράσινα μέρη των δύο ορθογωνίων έχουν ίσα εμβαδά.

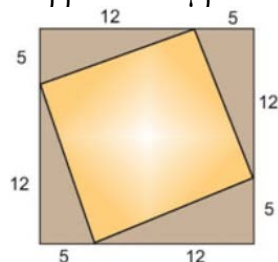


Ονομάζουμε τις διαστάσεις με α, β.
Τα ορθογώνια έχουν εμβαδόν $E = \alpha \cdot \beta$.



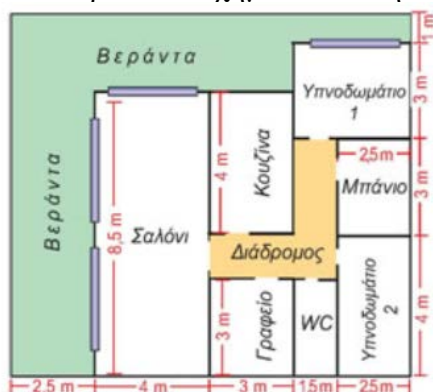
Τα κίτρινα τρίγωνα έχουν εμβαδόν $E = \frac{\alpha \cdot \beta}{2}$. Άρα και τα πράσινα έχουν ίδιο εμβαδόν.

Να βρείτε το εμβαδόν του πορτοκαλί τετραγώνου του παρακάτω σχήματος.



Από το εμβαδόν του τετραγώνου θα αφαιρέσουμε τα τέσσερα τρίγωνα.
 $E_{\text{τρ}} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$. Άρα $E = 17^2 - 4 \cdot 30 = 169$ **τ. μον.**

π.χ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η κάτοψη ενός διαμερίσματος

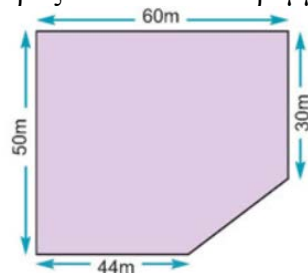


Να βρείτε:

- Το εμβαδόν κάθε δωματίου.
- Το εμβαδόν του γωνιακού διαδρόμου.
- Το εμβαδόν της βεράντας.

- $E_{\text{σαλ}} = 4 \cdot 8,5 = 34 \text{ m}^2$. $E_{\text{κουζ}} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ m}^2$. $E_{\text{γρ}} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ m}^2$. $E_{\text{wc}} = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ m}^2$.
 $E_{\text{υπ1}} = (2,5 + 1,5) \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$. $E_{\text{μπ}} = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ m}^2$. $E_{\text{υπ2}} = 2,5 \cdot 4,5 = 10 \text{ m}^2$.
- $E_{\text{διαδ}} = 1 \cdot 4,5 + 4 \cdot 1,5 = 10,5 \text{ m}^2$.
- $E_{\text{ολικο}} = 148,5 \text{ m}^2$. $E_{\text{διαμ}} = 7 \cdot 8,5 + 4 \cdot 10 = 99,5 \text{ m}^2$. Άρα $E_{\text{βερ}} = 148,5 - 99,5 = 49 \text{ m}^2$.

π.χ. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το τοπογραφικό διάγραμμα ενός κτήματος το οποίο πωλείται προς 20.000 € το στρέμμα.



- Να βρεθεί η αξία του κτήματος.
- Πόσα κλήματα μπορούμε να φυτέψουμε στο κτήμα αυτό, αν κάθε κλήμα απαιτεί 2,5 m² χώρο;

- $E = 60 \cdot 50 - \frac{20 \cdot 16}{2} = 2840 \text{ m}^2 = 2,84 \text{ στρέμματα}$. Η αξία κτήματος είναι $2,84 \cdot 20000 = 56800$ **€**.
- $2840 : 2,5 = 1136$ **κλήματα**.