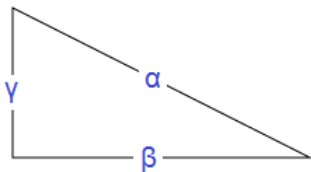


ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (Π.Θ.)

Π.Θ. Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με : ΚΑΘΕΤΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ $\rightarrow \beta, \gamma$
ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ $\rightarrow \alpha$



Άρα από Π.Θ ισχύει ότι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι απλά ένας τύπος που συνδέει τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Μέθοδος: Το χρησιμοποιούμε όταν ξέρουμε τις δύο πλευρές και ζητάμε την τρίτη. Τότε λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει από το Π.Θ ως προς την άγνωστη πλευρά.

Στην ισότητα που προκύπτει από το Π.Θ. επειδή η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου αυτή θα είναι στο ένα μέλος μόνη της, ενώ στο άλλο μέλος θα είναι οι δύο (κάθετες) πλευρές.

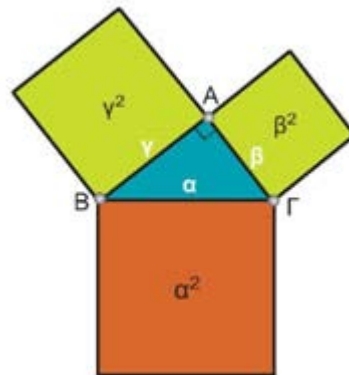
$\rightarrow$ Δηλαδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. (Κάθετες πλευρές: β, γ & Υποτείνουσα: α)

Παρατήρηση:

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο $\hat{A}$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$,

$\rightarrow$ Δηλαδή το εμβαδόν του μεγάλου πορτοκαλί τετραγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πράσινων τετραγώνων.



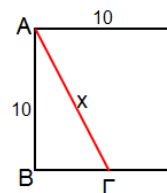
π.χ. Να βρείτε το x στο διπλανό τετράγωνο, αν το Γ είναι το μέσο της πλευράς.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ΑΒ=10 και ΒΓ=10/2=5 (Γ μέσο).

Π.Θ. στο ΑΒΓ: $x^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 = 100 + 25 = 125 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{125}$

$\Rightarrow |x| = \sqrt{125} \Rightarrow x = +\sqrt{125}$ ή $x = -\sqrt{125}$.

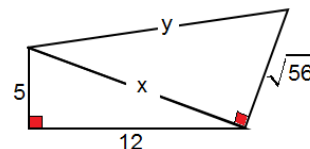
$\rightarrow$ ΔΕΚΤΗ Μόνο η $x = +\sqrt{125}$, γιατί αφού ψάχνουμε μήκος ευθύγραμμου τμήματος αυτό είναι ΘΕΤΙΚΟ!



π.χ. Να βρείτε τα x και y στο διπλανό σχήμα.

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{169} \Rightarrow |x| = \sqrt{169} \Rightarrow x = \pm \sqrt{13^2} = \pm 13.$$

➔ Αφού ψάχνουμε μήκος ευθυγράμμου τμήματος **δεκτή** μόνο η $x = +13$



Σχόλιο: Από εδώ και στο εξής θα δεχόμαστε σαν λύση μόνο τη Θετική εφοσον μιλάμε για ευθύγραμμα τμήματα (που είναι θετικά!)

$$y^2 = 13^2 + (\sqrt{56})^2 = 169 + 56 = 225 \Rightarrow |y| = \sqrt{225} \Rightarrow y = \pm \sqrt{15^2} = \pm 15 \Rightarrow \text{ΔΕΚΤΗ η } y = +25.$$

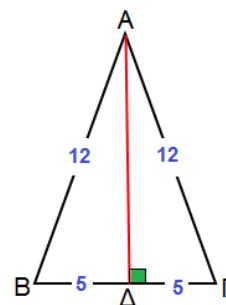
π.χ. Να βρείτε το ύψος ΑΔ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν $AB = AG = 12$ και $BG = 10$.

Επειδή $AB = AG = 12$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **ισοσκελές**.

Επομένως το ύψος ΑΔ είναι και **διάμεσος**. Άρα $B\Delta = \Delta\Gamma = 5$.

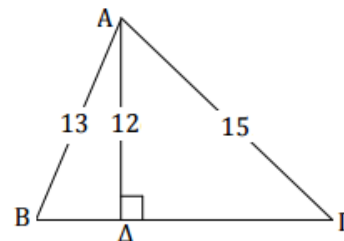
$$\begin{aligned} \text{Π.Θ. στο } AB\Delta: A\Delta^2 + B\Delta^2 &= AB^2 \\ \Rightarrow A\Delta^2 + 5^2 &= 12^2 \\ \Rightarrow A\Delta^2 &= 144 - 25 = 119 \\ \Rightarrow \sqrt{A\Delta^2} &= \sqrt{119} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } A\Delta = \sqrt{119} = \mathbf{10,9} \text{ και } E = \frac{A\Delta \cdot B\Gamma}{2} = \frac{10,9 \cdot 10}{2} = \mathbf{54,5}$$



π.χ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι $AB = 13$ cm, $A\Delta = 12$ cm και $AG = 15$ cm. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

$$\begin{aligned} \text{Π.Θ. στο } AB\Delta: AB^2 &= A\Delta^2 + B\Delta^2 \\ \Rightarrow 13^2 &= 12^2 + B\Delta^2 \\ \Rightarrow 169 &= 144 + B\Delta^2 \\ \Rightarrow B\Delta^2 &= 169 - 144 \\ \Rightarrow \sqrt{B\Delta^2} &= \sqrt{25} \\ \Rightarrow |B\Delta| &= \sqrt{5^2}, \text{ άρα } \mathbf{B\Delta = 5 \text{ cm.}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Π.Θ. στο } A\Gamma\Delta: A\Gamma^2 &= A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 \\ \Rightarrow 15^2 &= 12^2 + \Gamma\Delta^2 \\ \Rightarrow 225 &= 144 + \Gamma\Delta^2 \\ \Rightarrow \Gamma\Delta^2 &= 225 - 144 = 81 \\ \Rightarrow \sqrt{\Gamma\Delta^2} &= \sqrt{81} \\ \Rightarrow |\Gamma\Delta| &= \sqrt{9^2}, \text{ άρα } \mathbf{\Gamma\Delta = 9 \text{ cm.}} \end{aligned}$$

Επομένως $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 5 + 9 = \mathbf{14 \text{ cm.}}$

π.χ. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογώνιου τραπεζίου ΑΒΓΔ, αν ΑΒ=15, ΒΓ=15 και ΔΓ=24.

Για να βρούμε το εμβαδόν πρέπει να ξέρουμε τις δύο βάσεις ΑΒ και ΔΓ και το ύψος, που συμπίπτει με την πλευρά ΑΔ.

Από την κορυφή Β φέρουμε την $BE \perp \Delta\Gamma$. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ χωρίστηκε στο ορθογώνιο ΑΔΕΒ (γιατί;) και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ.

Τότε $EG = 24 - 15 = 9$ και $BE = AD$.

Αν ξέρουμε την ΒΕ, ξέρουμε και το ύψος.

Π.Θ. στο ΒΕΓ: $BE^2 + EG^2 = BG^2$

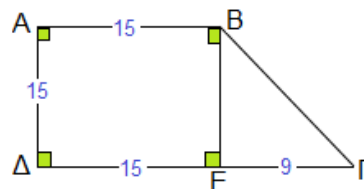
$$\Rightarrow BE^2 + 9^2 = 15^2$$

$$\Rightarrow BE^2 = 225 - 81 = 144$$

$$\Rightarrow \sqrt{BE^2} = \sqrt{144}$$

$$\Rightarrow |BE| = \sqrt{12^2}, \text{ άρα } BE = 12 \text{ cm.}$$

$$\text{Επομένως } E = \frac{(b+B)u}{2} = \frac{(AB + \Delta\Gamma) \cdot AD}{2} = \frac{(15 + 24) \cdot 12}{2} = 234.$$



π.χ. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του διπλανού ορθογώνιου παραλληλογράμμου.

Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\Rightarrow AB^2 + BG^2 = AG^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + 5^2 = 13^2$$

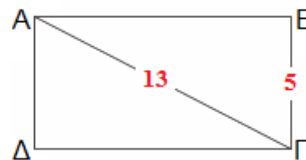
$$\Rightarrow AB^2 = 169 - 25$$

$$\Rightarrow \sqrt{AB^2} = \sqrt{144}$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{12^2}, \text{ άρα } AB = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Επομένως } E = \alpha\beta = 12 \cdot 5 = 60.$$

$$\Pi = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 5 = 24 + 10 = 34.$$



Εφαρμογή Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$

Λύση

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

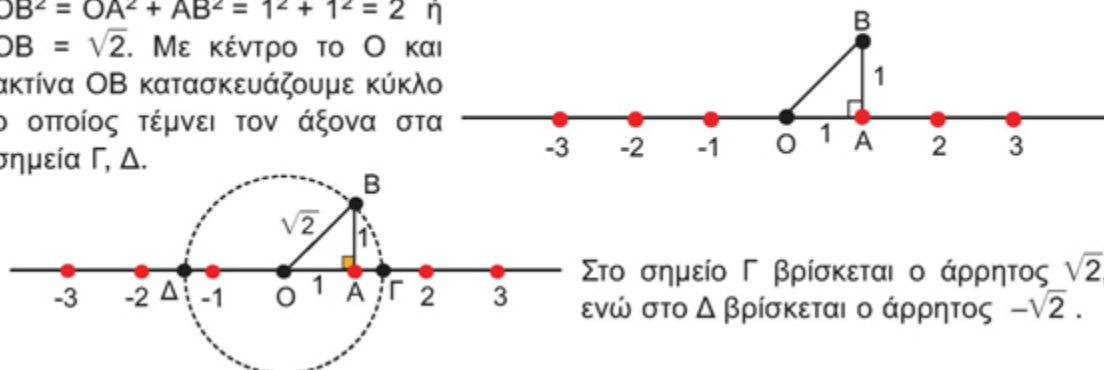
$$OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \text{ ή}$$

$$OB = \sqrt{2}. \text{ Με κέντρο το } O \text{ και}$$

ακτίνα OB κατασκευάζουμε κύκλο

ο οποίος τέμνει τον άξονα στα

σημεία Γ, Δ.

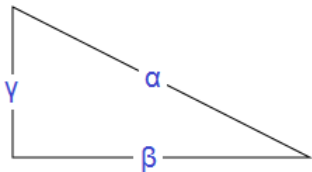


Στο σημείο Γ βρίσκεται ο άρρητος $\sqrt{2}$, ενώ στο Δ βρίσκεται ο άρρητος $-\sqrt{2}$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ.

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων (μικρότερων) πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή, και το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Δηλαδή : Στο τρίγωνο



Αν ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} = 90^\circ$ (α είναι η μεγαλύτερη πλευρά).

Μέθοδος: Με το αντίστροφο του Πυθαγορείου ΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ τα μήκη όλων των πλευρών ενός τριγώνου $\rightarrow$ ΤΟΤΕ Μπορούμε να βρούμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ποια είναι η ορθή γωνία του το είδος ενός τριγώνου (ως προς τις γωνίες), ελέγχοντάς ΑΝ ισχύει (?) η ισότητα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ όπου α θα πρέπει να είναι η μεγαλύτερη πλευρά!

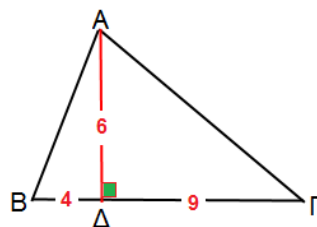
π.χ. Το διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο;

Π.Θ. στο ΑΒΔ: $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$

Π.Θ. στο ΑΓΔ: $AG^2 = AD^2 + GD^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$

Στο ΑΒΓ έχουμε: $BG^2 = 13^2 = 169$
και $AB^2 + AG^2 = 52 + 117 = 169$

Άρα το ΑΒΓ είναι **ορθογώνιο** στο Α.



π.χ. α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-1}{5} = 10$.

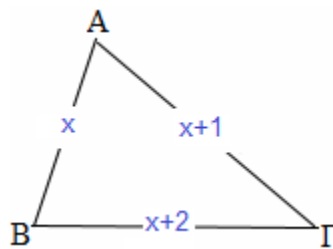
β) Να βρείτε το είδος του διπλανού τριγώνου, αν x είναι η ρίζα της εξίσωσης.

α) $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-1}{5} = 10$

$\Rightarrow 5(x+1) - 2(2x-1) = 10 \Rightarrow x = 3$.

β) Για $x=3$ έχουμε: $AB=3$, $AG=4$ και $BG=5$.

$BG^2 = 5^2 = 25$
και $AB^2 + AG^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ } , άρα το τρίγωνο είναι **ορθογώνιο** με $\hat{A} = 90^\circ$

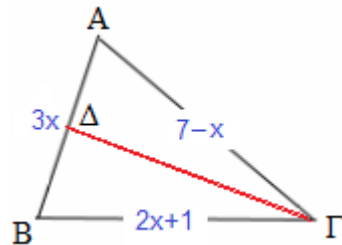


π.χ. Το διπλανό τρίγωνο ABΓ έχει περίμετρο 16 cm.

α) Να βρείτε το x.

β) Για x=2, να βρείτε το είδος του τριγώνου.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του.



α) Πρέπει $3x + (7-x) + (2x+1) = 16$

=> Λύνουμε την εξίσωση... **x=2**.

β) Για x=2, έχουμε: AB=6 cm, AΓ=5 cm και BΓ=5 cm.

Επειδή AΓ=BΓ το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ) Φέρουμε το ύψος ΓΔ του τριγώνου. Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές το ύψος ΓΔ είναι και **διάμεσος**, άρα AΔ=3cm.

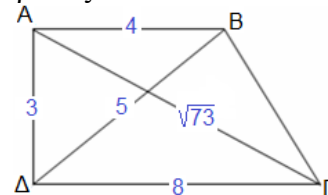
Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{AB \cdot \Gamma\Delta}{2}$.

Π.Θ. στο τρίγωνο AΓΔ: $\Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = A\Gamma^2 \Rightarrow \Gamma\Delta^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow \Gamma\Delta = 4$ cm.

Επομένως: $E = \frac{6 \cdot 4}{2} = \mathbf{12 \text{ cm}^2}$.

π.χ. α) Να δείξετε ότι το διπλανό τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



α) Το τρίγωνο ABΔ είναι ορθογώνιο στο A διότι:

$$\left. \begin{array}{l} B\Delta^2 = 25 \\ \text{και } AB^2 + A\Delta^2 = 9 + 16 = 25 \end{array} \right\}$$

Το τρίγωνο AΔΓ είναι ορθογώνιο στο Δ διότι:

$$\left. \begin{array}{l} A\Gamma^2 = \sqrt{73}^2 = 73 \\ \text{και } \Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = 9 + 64 = 73 \end{array} \right\}$$

Άρα AB//ΔΓ ως κάθετες στην AΔ, επομένως το ABΓΔ είναι **ορθογώνιο τραπέζιο**.

β) Επομένως $(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB + \Delta\Gamma) \cdot A\Delta}{2} = \frac{(4 + 8) \cdot 3}{2} = \mathbf{18}$.