

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ:

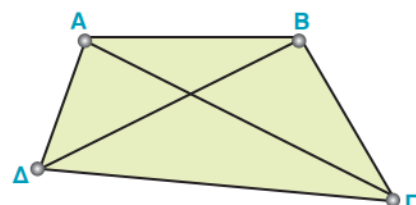
Τεθλασμένη λέγεται η γραμμή που αποτελείται από συνεχόμενα, (διαδοχικά), ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το πρώτο σημείο του πρώτου ευθύγραμμου τμήματος και το τελευταίο σημείο του τελευταίου ευθύγραμμου τμήματος ονομάζονται άκρα της τεθλασμένης.

Ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.
ΚΥΡΤΑ και ΜΗ-ΚΥΡΤΑ ευθύγραμμο σχήματα:

	Τεθλασμένη γραμμή	Ευθύγραμμο σχήμα	
Κυρτή			Κυρτό
μη κυρτή			μη κυρτό

- Στην πρώτη σειρά του παραπάνω πίνακα βλέπουμε μία μπλε γραμμή που αφήνει το υπόλοιπο σχήμα στην ίδια μεριά της, (ημιεπίπεδο). Τα σχήματα αυτά λέγονται **κυρτά**.
- Στην δεύτερη σειρά βλέπουμε την μπλε γραμμή που αφήνει το υπόλοιπο σχήμα και στις δύο μεριές της. Τα σχήματα αυτά λέγονται **μη κυρτά**.

Πολύγωνο λέγεται το «κλειστό» σχήμα που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ή μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή.



!!! Τα πολύγωνα ονομάζονται από τον αριθμό των γωνιών τους: νι-γωνο
(Εκτός από κυρτό πολύγωνο με 4 πλευρές → ΤΕΤΡΑ-πλευρο)

Διαγώνιος ενός πολυγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο μη διαδοχικές κορυφές, π.χ. ΑΓ και ΒΔ.

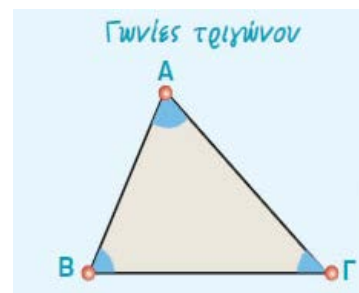
Ειδική περίπτωση πολυγώνου: Τρίγωνο λέγεται το πολύγωνο που έχει τρεις πλευρές.

i) Σε κάθε πλευρά τριγώνου αντιστοιχούν δύο γωνίες **προσκειμένες** και μία **απέναντι**.

ii) Δύο πλευρές τριγώνου ορίζουν μία γωνία που λέγεται **περιεχόμενη**.

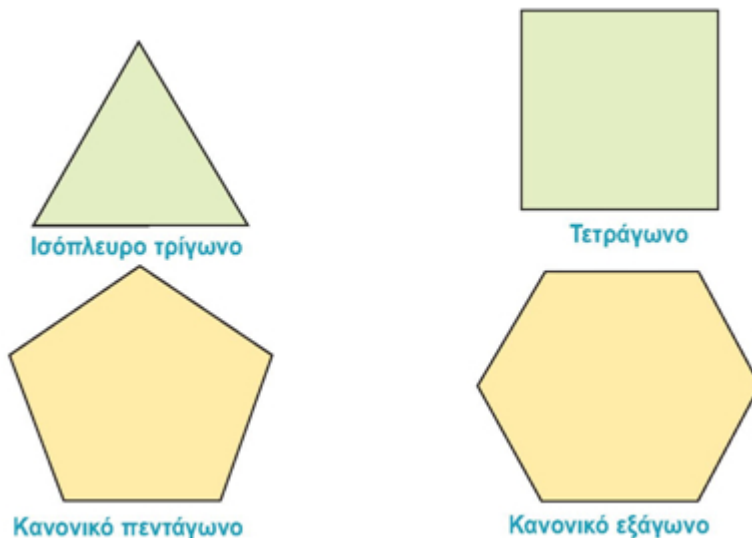
- Η γωνία Α είναι περιεχόμενη των ΑΒ και ΑΓ.
- Η γωνία Α είναι απέναντι από την ΒΓ.
- Οι γωνίες Β και Γ είναι προσκειμένες της πλευράς ΒΓ.

Το τρίγωνο δεν έχει διαγώνιο.



ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** αν έχει όλες τις πλευρές και τις γωνίες του ίσες.
π.χ.



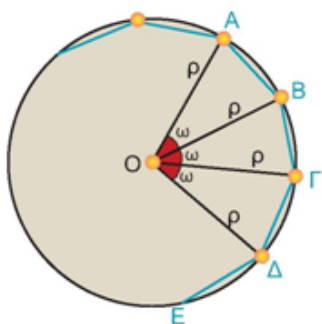
ΟΡΙΣΜΟΣ: Όταν ΟΛΕΣ οι κορυφές ενός πολυγώνου είναι σημεία ενός κύκλου τότε λέμε ότι το πολύγωνο μπορεί να **εγγραφεί** σε κύκλο.

→ Το πολύγωνο λέγεται **εγγεγραμμένο** στον κύκλο και ο κύκλος **περιγεγραμμένος** στο πολύγωνο.

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΚΑΘΕ κανονικό πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο

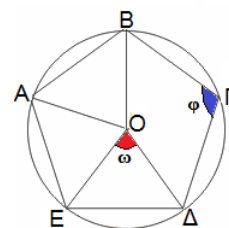
ΟΡΙΣΜΟΣ: Η επίκεντρη γωνία $\hat{\omega}$ του περιγεγραμμένου κύκλου του πολυγώνου με πλευρές που καταλήγουν στα άκρα μιας πλευράς του κανονικού πολυγώνου λέγεται **κεντρική γωνία** του κανονικού πολυγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίση με $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n}$, όπου **n είναι το πλήθος των πλευρών του.**



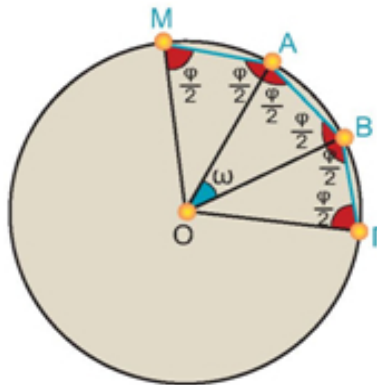
Προφανώς το n είναι φυσικός αριθμός!

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η $\hat{\phi}$ με πλευρές δυο διαδοχικές πλευρές του κανονικού πολυγώνου λέγεται **γωνία** του πολυγώνου.



Σχέση της κεντρικής γωνίας $\hat{\omega}$ και της γωνίας $\hat{\phi}$ ενός κανονικού ν-γώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ με την γωνία $\hat{\phi}$ ενός κανονικού πολυγώνου είναι ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ. Δηλαδή $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ$



Απόδειξη

→Ενώνουμε το κέντρο του ν-γώνου με τις κορυφές, οπότε σχηματίζονται ν ίσα ισοσκελή τρίγωνα.

→ Σε καθένα από τα τρίγωνα αυτά οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες με $\frac{\hat{\phi}}{2}$

Άρα στο τρίγωνο ΟΑΒ θα έχουμε ότι: $\hat{\omega} + \frac{\hat{\phi}}{2} + \frac{\hat{\phi}}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} + \frac{2\hat{\phi}}{2} = 180 \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\phi} = 180$

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ: Από το πλήθος n των πλευρών του το πολύγωνο παίρνει και το όνομά του.

π.χ. Αν $n=3$, έχει 3 πλευρές και λέγεται κανονικό τρίγωνο (Θα είναι ισόπλευρο τρίγωνο).

Αν $n=4$, έχει 4 πλευρές και λέγεται κανονικό τετρά**πλευρο** (Θα είναι τετράγωνο).

Αν $n=5$, έχει 5 πλευρές και λέγεται κανονικό πεντάγωνο.

Αν $n=6$, έχει 6 πλευρές και λέγεται κανονικό εξάγωνο.

Όλα έχουν την κατάληξη **-γωνο**, εκτός από το κανονικό τετρά-**πλευρο**

Κατασκευή κανονικών πολυγώνων

Η διαδικασία κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές (κανονικό n -γωνο) ακολουθεί τα εξής βήματα:

Βήμα 1^ο : Υπολογίζουμε την κεντρική του γωνία $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{\mathbf{y}}$

Βήμα 2^ο : Σχηματίζουμε διαδοχικά n επίκεντρες γωνίες ω , οι οποίες χωρίζουν έναν κύκλο σε n ίσα τόξα.

Βήμα 3^ο : Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων, αυτές είναι και οι πλευρές του ζητούμενου κανονικού πολυγώνου.

π.χ. Η κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ ενός κανονικού πολυγώνου είναι 60° . Να βρείτε το είδος του πολυγώνου και να υπολογίσετε την γωνία του.

Επειδή $\hat{\omega} = 60^\circ$, έχουμε $60^\circ = \frac{360^\circ}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$, δηλαδή **κανονικό εξάγωνο**.

Επομένως $\hat{\phi} = 180^\circ - \hat{\omega} = 180^\circ - 60^\circ = \mathbf{120^\circ}$.

π.χ. Υπάρχει πολύγωνο με κεντρική γωνία 54° ;

Αφού $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{\nu} \Rightarrow 54^\circ = \frac{360^\circ}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{360^\circ}{54^\circ} = 6,6$ πλευρές! Άρα **δεν** υπάρχει τέτοιο πολύγωνο.

π.χ. Δίνεται κανονικό πεντάγωνο.

α.) Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ και την γωνία του $\hat{\phi}$.

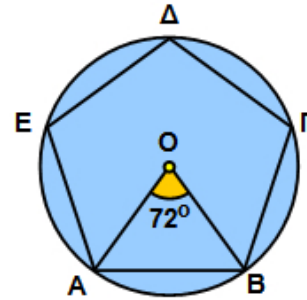
β.) Να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο.

α.) Έχουμε $n=5$, άρα $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{5} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ και $\phi = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

β.) Βήμα 1^ο : Ξέρουμε την κεντρική του γωνία $\hat{\omega} = 72^\circ$ **άρα** Γράφουμε κύκλο (O, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία $\angle AOB = \hat{\omega} = 72^\circ$ η οποία βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$

Βήμα 2^ο : Με το διαβήτη θεωρούμε διαδοχικά τόξα ίσα με το $\widehat{AB}$

Βήμα 3^ο : Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.



π.χ. Η γωνία ϕ ενός κανονικού πολυγώνου είναι 135° . Να βρείτε το είδος του πολυγώνου και να υπολογίσετε την κεντρική γωνία του.

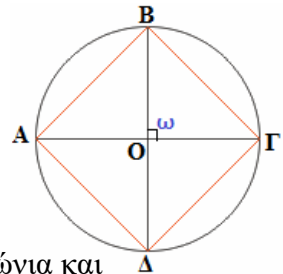
Επειδή $\hat{\phi} = 135^\circ$ θα είναι $\hat{\omega} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Άρα από τη σχέση $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow 45^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$, δηλαδή **κανονικό οκτάγωνο**.

π.χ. Σε κύκλο (O, 10cm) εγγράφουμε κανονικό τετράπλευρό. Να υπολογίσετε:

α) την περίμετρο Π.

β) το εμβαδόν Ε.



α) Έχουμε $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Τα τρίγωνα επομένως που σχηματίζονται είναι ορθογώνια και ισοσκελή και άρα οι γωνίες της βάσης τους θα είναι ίσες με 45° .

Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB: $AB^2 = AO^2 + OB^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$.

Άρα $AB = \sqrt{200}$ cm. Επομένως

$\Pi = 4 \cdot AB = 4 \cdot \sqrt{200}$ **cm**.

β) Το ABΔΓ είναι κανονικό τετράπλευρό άρα ΕΙΝΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ!

Οπότε $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = \sqrt{200}^2 = 200$ **cm²**.

π.χ. Ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία;

Αν $\hat{\omega} = \phi$ τότε $\hat{\omega} + \hat{\omega} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{\omega} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\omega} = 90^\circ$, οπότε $n = \frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$, δηλαδή **τετράγωνο**.

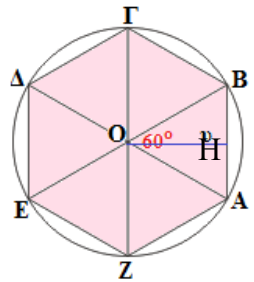
π.χ. Σε κύκλο (Ο,10cm) εγγράφουμε κανονικό εξάγωνο. Να υπολογίσετε:

α) την περίμετρο Π.

β) το εμβαδόν Ε.

α) Έχουμε: $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Τα 6 τρίγωνα που σχηματίζονται είναι ισόπλευρα, αφού μία γωνία τους είναι 60° . Άρα $\Pi = 6 \cdot \rho = 6 \cdot 10 = \mathbf{60cm}$.



β) Αρκεί να βρούμε το εμβαδόν ενός από τα έξι τρίγωνα που σχηματίζονται. Επειδή τα τρίγωνα αυτά είναι όλα ίσα μεταξύ τους θα έχουν το ίδιο εμβαδόν οπότε $E_{\text{ΕΞΑΓΩΝΟΥ}} = 6 \cdot E_{\text{τρίγωνου OAB}}$

Εύρεση Εμβαδού τριγώνου OAB:

$$E_{(AOB)} = \frac{1}{2}(OA) \cdot (\text{υψος της πλευρας } OA), \quad \text{όπου } OA=10\text{cm}$$

Άρα αρκεί να βρούμε το ΥΨΟΣ που αντιστοιχεί στην πλευρά OA.

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο OHA: $AH^2 + OH^2 = OA^2$ (1)

Υπενθύμιση: Το ύψος κάθε πλευράς ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι και διάμεσος της πλευράς και διχοτόμος την απέναντι γωνίας.

$$\text{Άρα } AH = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad (AB=10 \text{ αφού το τρίγωνο είναι ισόπλευρο!})$$

$$\text{Άρα η (1)} \Rightarrow 5^2 + v^2 = 10^2 \Rightarrow v^2 = 100 - 25 = 75 \Rightarrow v^2 = 75 \Rightarrow |v| = \sqrt{75} \Rightarrow v = \pm\sqrt{75}$$

$$\text{Οπότε } v = +\sqrt{75}$$

$$\text{Έτσι έχουμε } E_{(AOB)} = \frac{1}{2}(OA) \cdot (\text{υψος της πλευρας } OA) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{75} = 5 \cdot \sqrt{75} \text{ cm}^2$$

$$\text{Άρα το εξάγωνο έχει εμβαδόν } E_{\text{ΕΞΑΓΩΝΟΥ}} = 6 \cdot E_{\text{τρίγωνου OAB}} = 6 \cdot 5\sqrt{75} = \mathbf{30\sqrt{75} \text{ cm}^2}$$