

ΑΛΓΕΒΡΑ §1.1 : Γραμμικά Συστήματα

ΘΕΩΡΙΑ (Ορισμοί - Θεωρήματα - Προτάσεις)

- Μια εξίσωση της μορφής $ax+by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$, λέγεται **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους x και y .
- Κάθε ζεύγος αριθμών (x_0, y_0) που επαληθεύει μια γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης**.
- Η γραφική παράσταση των λύσεων μιας γραμμικής εξίσωσης είναι μία **ευθεία**.

Περίπτωση	Μορφή εξίσωσης	Ευθεία
$\beta \neq 0$	$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$	$\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$, τέμνει τον $y'y$ στο $\frac{\gamma}{\beta}$
$\alpha = 0$ (και $\beta \neq 0$)	$y = \frac{\gamma}{\beta}$	παράλληλη στον $x'x$
$\beta = 0$ (και $\alpha \neq 0$)	$x = \frac{\gamma}{\alpha}$	παράλληλη στον $y'y$, τέμνει τον $x'x$ στο $\frac{\gamma}{\alpha}$

- Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει τη μορφή

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

και λέγεται **γραμμικό σύστημα 2×2** .

- Κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει **και τις δύο** εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.
- Ένα γραμμικό σύστημα 2×2 μπορεί να έχει:
 - μία μοναδική λύση (οι δύο ευθείες τέμνονται), ή
 - καμία λύση (οι δύο ευθείες είναι παράλληλες), ή
 - άπειρο πλήθος λύσεων (οι δύο ευθείες συμπίπτουν).
- Δύο συστήματα λέγονται **ισοδύναμα** όταν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Στη μέθοδο αυτή πολλαπλασιάζουμε, αν χρειάζεται, τις δύο εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές ενός από τους δύο αγνώστους να γίνουν **αντίθετοι**. Στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, ώστε να **απαλειφθεί** ο ένας άγνωστος. Αναλυτικά:

1. Επιλέγουμε τον άγνωστο που θέλουμε να απαλειφθεί.
2. Πολλαπλασιάζουμε τις δύο εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του συγκεκριμένου αγνώστου να γίνουν αντίθετοι.
3. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις.

4. Λύνουμε την εξίσωση με τον έναν άγνωστο.
5. Αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε σε μία από τις αρχικές εξισώσεις και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο.

2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

1. Λύνουμε μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο.
2. Αντικαθιστούμε την παράσταση που βρήκαμε στην άλλη εξίσωση.
3. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς τον έναν άγνωστο.
4. Αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε σε μία από τις αρχικές εξισώσεις και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο.

Σε κάθε περίπτωση κάνουμε, κατά προτίμηση, **επαλήθευση** των λύσεων στην αρχική μορφή του συστήματος.

3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Για να λύσουμε γραφικά ένα γραμμικό σύστημα:

1. σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες,
2. εντοπίζουμε το κοινό τους σημείο,
3. οι συντεταγμένες του κοινού σημείου αποτελούν τη λύση του συστήματος.

! Η γραφική επίλυση μπορεί να δώσει **προσεγγιστικές** λύσεις. Για την ακριβή λύση προτιμούμε, συνήθως, την αλγεβρική επίλυση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18431. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$ με αγνώστους x, y και k παράμετρο.

- a) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.
- b) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

21227. a) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$.

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1) : 5x - y = 5$ και $(\varepsilon_2) : -5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

31570. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

- a) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M .
- b) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$ διέρχεται από το M .