ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης

Μονοτονία συνάρτησης

Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Γνησίως μονότονη συνάρτηση

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα, είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

Γραμμικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$:

- είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $\alpha > 0$,
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $\alpha < 0$.

Ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο

Ολικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο**, όταν

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Το x_0 λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ η τιμή $f(x_0)$ λέγεται **ολικό ελάχιστο** ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης.

Ολικό μέγιστο

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο**, όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Το x_0 λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ η τιμή $f(x_0)$ λέγεται **ολικό μέγιστο** ή απλώς μέγιστο της συνάρτησης.

Ολικά ακρότατα

Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** της συνάρτησης.

Εύρεση ακροτάτου με ανισότητα

Για τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$, επειδή $x^4 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$f(x) = 3x^4 + 1 \geq 1 = f(0).$$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο 1 στη θέση $x = 0$.
Αντίστοιχα, για τη συνάρτηση $g(x) = -3x^4 + 1$ ισχύει

$$g(x) = -3x^4 + 1 \leq 1 = g(0),$$

οπότε η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο 1 στη θέση $x = 0$.

Προσοχή

Μια συνάρτηση μπορεί να έχει και μέγιστο και ελάχιστο, μόνο ελάχιστο, μόνο μέγιστο ή κανένα από τα δύο. Η ύπαρξη ολικών ακροτάτων δεν είναι δεδομένη για κάθε συνάρτηση.

Άρτια συνάρτηση

Ορισμός άρτιας συνάρτησης

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν

$$-x \in A \qquad \text{και} \qquad f(-x) = f(x).$$

Συμμετρία άρτιας συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Παράδειγμα άρτιας συνάρτησης

Η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 \\ &= 2x^4 - x^2 + 1 = f(x). \end{aligned}$$

Άρα η f είναι άρτια.

Περιττή συνάρτηση

Ορισμός περιττής συνάρτησης

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύουν

$$-x \in A \qquad \text{και} \qquad f(-x) = -f(x).$$

Συμμετρία περιττής συνάρτησης

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

Παράδειγμα περιττής συνάρτησης

Η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^3 - (-x) \\ &= -2x^3 + x = -f(x). \end{aligned}$$

Άρα η f είναι περιττή.

Έλεγχος αν f άρτια ή περιττή

Για να ελέγξουμε αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή:

1. Ελέγχουμε αν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το 0: αν x ανήκει στο πεδίο ορισμού, πρέπει να ανήκει και το $-x$.
2. Εκφράζουμε το $f(-x)$ και:
   (α΄) αν καταλήξουμε στην ισότητα $f(-x) = f(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού, η συνάρτηση είναι άρτια.
   (β΄) αν καταλήξουμε στην ισότητα $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού, η συνάρτηση είναι περιττή.
   (γ΄) αν δεν προκύπτει κάποια από τις παραπάνω ισότητες, αρκεί να υπολογίσουμε δυο τιμές $f(a)$ και $f(-a)$, για κάποιο αριθμό a στο πεδίο ορισμού της f. Δείχνοντας ότι $f(-a) \neq f(a)$ και $f(-a) \neq -f(a)$ για κάποιο αριθμό a στο πεδίο ορισμού της f, η f δεν είναι άρτια ούτε περιττή, αντίστοιχα.

2.2 Κατακόρυφη – οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ είναι γνωστή. Η γραφική παράσταση μιας νέας συνάρτησης f μπορεί να προκύψει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ.

Κατακόρυφη μετατόπιση

Μετατόπιση προς τα πάνω

Αν

$$f(x) = \varphi(x) + c, \qquad c > 0,$$

τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της φ με **κατακόρυφη μετατόπιση κατά c μονάδες προς τα πάνω**, δηλαδή παράλληλα προς τον άξονα $y'y$.

Μετατόπιση προς τα κάτω

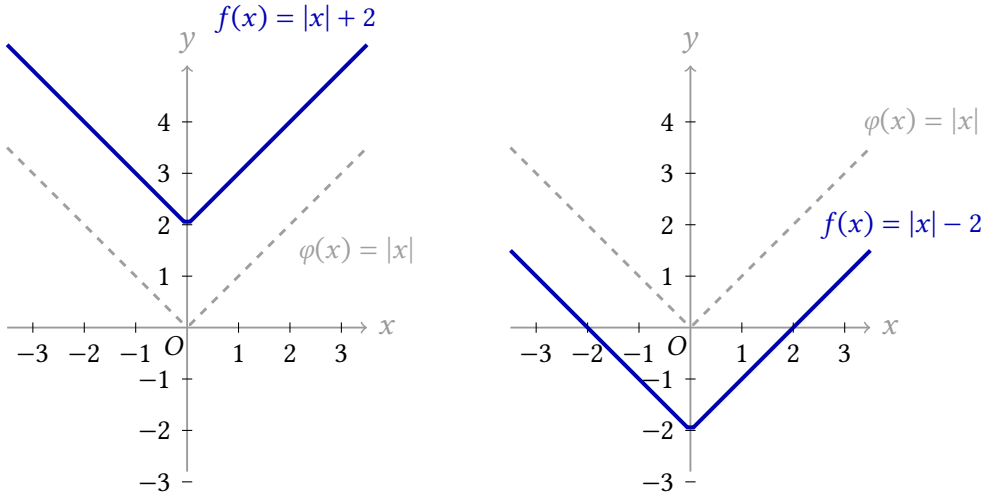
Αν

$$f(x) = \varphi(x) - c, \qquad c > 0,$$

τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της φ με **κατακόρυφη μετατόπιση κατά c μονάδες προς τα κάτω**.

Παράδειγμα κατακόρυφης μετατόπισης

Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ με μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.
Η γραφική παράσταση της $g(x) = |x| - 2$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ με μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.



Οριζόντια μετατόπιση

Μετατόπιση προς τα δεξιά

Αν

$$f(x) = \varphi(x - c), \qquad c > 0,$$

τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της φ με **οριζόντια μετατόπιση κατά c μονάδες προς τα δεξιά**, δηλαδή παράλληλα προς τον άξονα $x'x$.

Μετατόπιση προς τα αριστερά

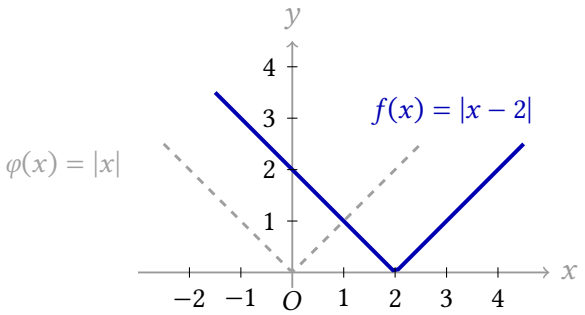
Αν

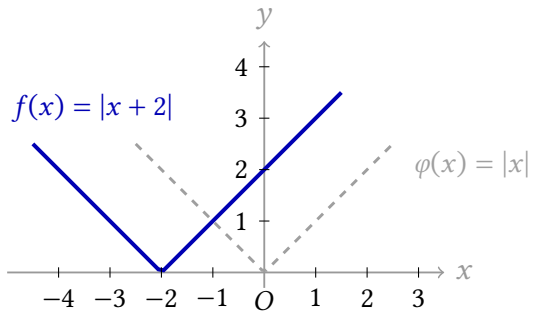
$$f(x) = \varphi(x + c), \qquad c > 0,$$

τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της φ με **οριζόντια μετατόπιση κατά c μονάδες προς τα αριστερά**.

Παράδειγμα οριζόντιας μετατόπισης

Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x - 2|$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ με μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.
Η γραφική παράσταση της $g(x) = |x + 2|$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ με μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.





Προσοχή στο πρόσημο της οριζόντιας μετατόπισης

Στο εσωτερικό της συνάρτησης το πρόσημο φαίνεται αντίστροφο από την κατεύθυνση της μετατόπισης:

Τύπος	Μετατόπιση
$f(x) = \varphi(x - c),\ c > 0$	δεξιά κατά c
$f(x) = \varphi(x + c),\ c > 0$	αριστερά κατά c

Συνδυασμός οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης

Πλάγια μετατόπιση

Για συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = \varphi(x \pm c) \pm d, \qquad c, d > 0,$$

η γραφική παράσταση προκύπτει με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις:

- οριζόντια, σύμφωνα με το πρόσημο μέσα στην παρένθεση,
- κατακόρυφη, σύμφωνα με το πρόσημο έξω από την παρένθεση.

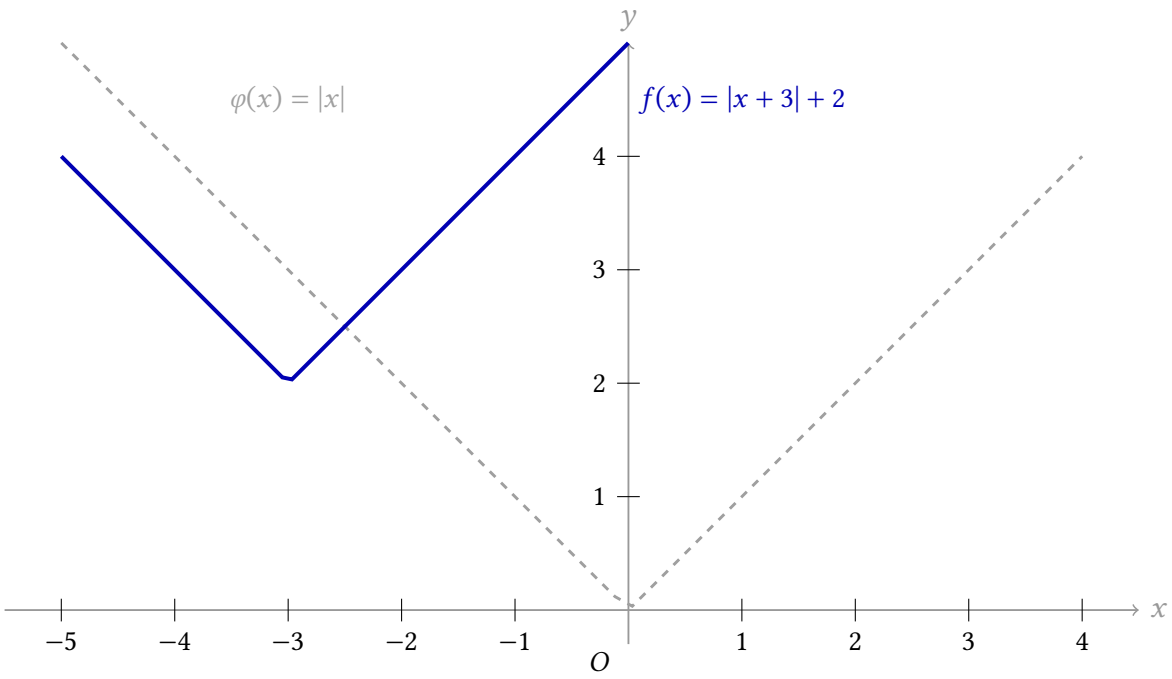
Παράδειγμα πλάγιας μετατόπισης

Η γραφική παράσταση της

$$f(x) = |x + 3| + 2$$

προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ με:

1. οριζόντια μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά,
2. κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.



Συνοπτικός πίνακας

Ιδιότητα f	**Ορισμός / Κριτήριο / Αποτέλεσμα**
Γνησίως αύξουσα	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Γνησίως φθίνουσα	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
Ολικό ελάχιστο στο x_0	$f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x στο πεδίου ορισμού
Ολικό μέγιστο στο x_0	$f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x στο πεδίου ορισμού
Άρτια συνάρτηση	$f(-x) = f(x)$, άξονας συμμετρίας ο $y'y$
Περιττή συνάρτηση	$f(-x) = -f(x)$, κέντρο συμμετρίας η αρχή O
$f(x) = \varphi(x) + c$, με $c > 0$	Μετατόπιση προς τα πάνω κατά c
$f(x) = \varphi(x) - c$, με $c > 0$	Μετατόπιση προς τα κάτω κατά c
$f(x) = \varphi(x - c)$, με $c > 0$	Μετατόπιση προς τα δεξιά κατά c
$f(x) = \varphi(x + c)$, με $c > 0$	Μετατόπιση προς τα αριστερά κατά c