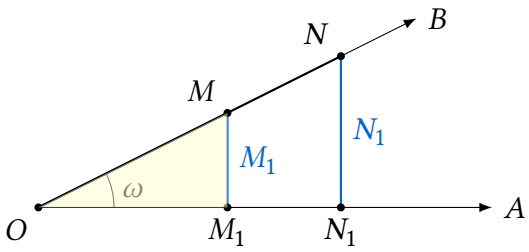
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Οξείας Γωνίας

Θεωρούμε μια οξεία γωνία ω. Αν πάνω στη μία από τις δύο πλευρές της γωνίας ω πάρουμε τυχαία σημεία M και N και φέρουμε τις κάθετες MM_1 και NN_1 προς την άλλη πλευρά της γωνίας, τότε, φανερά, τα τρίγωνα OMM_1 και ONN_1 θα είναι όμοια.
Επομένως, για τη γωνία ω τα παρακάτω πηλίκα είναι σταθερά και ονομάζονται **ημίτονο**, **συνημίτονο**, **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη** της γωνίας ω:

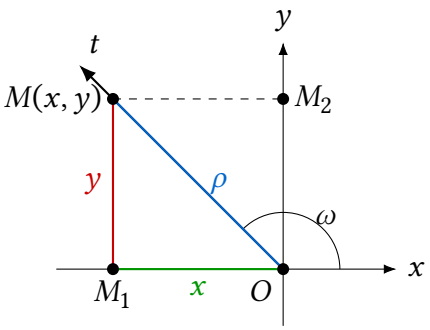


Ημίτονο, Συνημίτονο, Εφαπτομένη, Συνεφαπτομένη οξείας γωνίας

$$\eta\mu\omega = \frac{(MM_1)}{(OM)}\left(\frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}\right)$$
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{(OM_1)}{(OM)}\left(\frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}\right)$$
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{(MM_1)}{(OM_1)}\left(\frac{\text{Απέναντι Κάθετη}}{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}\right)$$
$$\sigma\varphi\omega = \frac{(OM_1)}{(MM_1)}\left(\frac{\text{Προσκείμενη Κάθετη}}{\text{Απέναντι Κάθετη}}\right)$$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων. Ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας ω, ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται **τελική πλευρά** της ω. Πάνω στην τελική πλευρά παίρνουμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$ και φέρνουμε την κάθετη MM_1 στον άξονα $x'x$ και την κάθετη MM_2 στον άξονα $y'y$. Δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς:



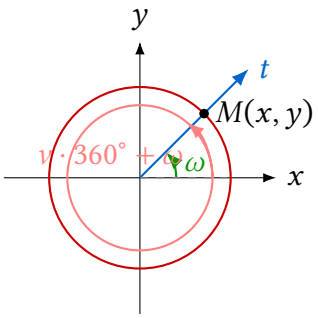
Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

Γωνίες που διαφέρουν κατά ακέραιες περιστροφές

Ας θεωρήσουμε μια γωνία ω (θετική ή αρνητική) με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox. Αν ο ημιάξονας Ox, στρεφόμενος γύρω από το O κατά τη θετική φορά, συμπληρώσει ν πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία ω, τότε θα έχει διαγράψει γωνία $\nu\cdot 360^\circ+\omega$, που έχει την **ίδια τελική πλευρά** με την ω.



Οι παραπάνω γωνίες, που είναι της μορφής $k\cdot 360^\circ+\omega$, $k\in\mathbb{Z}$, επειδή έχουν την ίδια τελική πλευρά, θα έχουν και τους **ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς**. Επομένως, για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ ισχύει:

Τριγωνομετρικοί αριθμοί και πλήρεις περιστροφές

$$\eta\mu(k\cdot 360^\circ+\omega)=\eta\mu\omega,\quad \sigma\upsilon\nu(k\cdot 360^\circ+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$$
$$\varepsilon\varphi(k\cdot 360^\circ+\omega)=\varepsilon\varphi\omega,\quad \sigma\varphi(k\cdot 360^\circ+\omega)=\sigma\varphi\omega$$

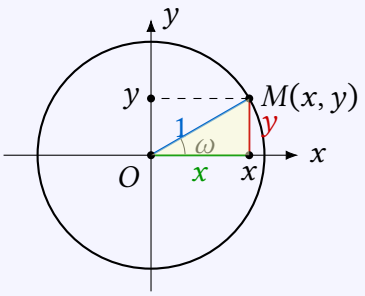
Ο Τριγωνομετρικός Κύκλος

Ο Τριγωνομετρικός Κύκλος

Με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ γράφουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**. Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον κύκλο στο σημείο $M(x,y)$, τότε:

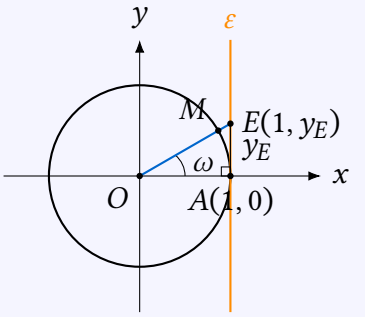
$$\textbf{συνω}=\textbf{x}\text{ και }\textbf{ημω}=\textbf{y}$$

Ο άξονας $x'x$ καλείται **άξονας συνημιτόνων** και ο άξονας $y'y$ καλείται **άξονας ημιτόνων**.



Ο Άξονας των Εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια γωνία ω. Φέρνουμε την εφαπτομένη ε του κύκλου στο σημείο $A(1,0)$. Αν η τελική πλευρά της γωνίας τέμνει την ε στο σημείο E, τότε $\varepsilon\varphi\omega=y_E$.
Η ευθεία ε καλείται **άξονας εφαπτομένων**.



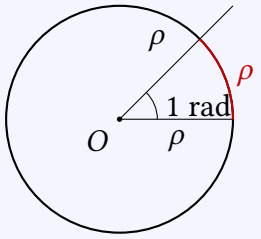
Το Ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Ακτίνιο (Rad)

Ορισμός: Ακτίνιο (1 rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου. Αν μ το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες και α το αντίστοιχο μέτρο σε rad, τότε:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Κατά συνέπεια, έχουμε: α rad $= \left(\alpha \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ$ και αντίστροφα: $\mu^\circ = \left(\mu \cdot \frac{\pi}{180}\right)$ rad.



Πίνακας Βασικών Γωνιών

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0