3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω προκύπτουν σχέσεις που τους συνδέουν και είναι γνωστές ως **τριγωνομετρικές ταυτότητες**. Οι ταυτότητες αυτές είναι χρήσιμες στο λογισμό με παραστάσεις που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Συγκεκριμένα ισχύουν:

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ 1

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι:

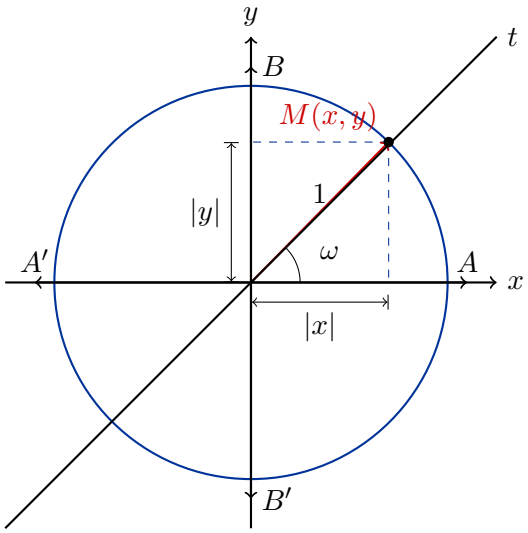
$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{και} \quad y = \eta\mu\omega$$

Επειδή όμως $(OM) = 1$ και $(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$, θα ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$$



ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ 2

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο ίδιο σχήμα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad (\text{εφόσον } x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0)$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad (\text{εφόσον } y = \eta\mu\omega \neq 0)$$

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων (1) και (2), θα αποδείξουμε δύο επιπλέον χρήσιμες ταυτότητες.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ 3

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad (\text{εφόσον } \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{ και } \eta\mu\omega \neq 0)$$

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ 4

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Άρα:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

ii) Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ θέσουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$, έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{1+\varepsilon\varphi^2\omega - 1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Άρα:

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι παραπάνω ταυτότητες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες όταν θέλουμε να εκφράσουμε το ημίτονο ή το συνημίτονο μιας γωνίας συναρτήσει της εφαπτομένης της, χωρίς να χρειάζεται να βρούμε πρώτα την ίδια τη γωνία.