§1.3 Αντίστροφη Συνάρτηση

1. Δίνεται μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,9)$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(i) Να λύσετε την εξίσωση:
$$f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$$

(ii) Να λύσετε την ανίσωση:
$$f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$$

2. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(-1,2)$.

(i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(e^x + 1) + 2) = 0$.

(iii) Αν ισχύει $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση:
$$f^{-1}(f(\ln(x + 1)) + 2) < -1$$

3. Έστω $f(x) = e^x + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

(i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση:
$$e^{\eta\mu x} + \eta\mu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2} \quad \text{με } x \in [0, \pi]$$

(iii) Να αποδείξετε ότι $e^\pi - e^e > e - \pi$.

(iv) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

(v) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται κάτω από την ευθεία:
$$y = x$$

(vi) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 8$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

(iii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) < x$.

(iv) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(-8)$.

(v) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(e^{3x} + 1) \leq 2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$.

(i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

(iii) Να βρείτε για ποια x η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$, αν $f(D_f) = \mathbb{R}$.

(iv) Να αποδείξετε ότι:

$$\ln \frac{e}{\pi} < \pi - e$$

(v) Να λύσετε την ανίσωση $\ln x > 1 - x$.

(vi) Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(\ln x) \geq f\left(\frac{e}{x}\right) \quad \text{με } x > 1$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x, x \in \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 1 - x$.

(iii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \leq 1 - x$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x}$.

(i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(ii) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

(iii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

(iv) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x - 1$.

Πηγή: «Μαθηματικά Γ Λυκείου» Στεργίου κ.α. - Εκδόσεις Σαββάλας