Θεώρημα Αντικατάστασης

1. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2} g(x) = 1$$

Να υπολογίσετε τα όρια:
α) $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x))$ β) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
α) $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 4x}{x}$ β) $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\eta\mu 3x}$ γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\epsilon\phi 3x}{x}$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
α) $A = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-2}$ β) $B = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\eta\mu(x-3)}{x^2-9}$ γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\epsilon\phi(x-5)}{x^2-25}$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
α) $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[6]{x} - 1}$ β) $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}$ γ) $\Gamma = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

5. Αν $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$, να υπολογίσετε τα όρια:
α) $A = \lim\limits_{h\to 0} f(h+3)$ β) $B = \lim\limits_{h\to 1} f(3h)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \quad \text{και} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) $f(0) = 0$ β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Πηγή: «Μαθηματικά Γ Λυκείου» Στεργίου κ.α. - Εκδόσεις Σαββάλας