§1.3 Μονότονες Συναρτήσεις - Ασκήσεις

1. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

(i) $f(8 - x^2) > f(-1)$

(ii) $f(2^x + 3) \leq f(5)$

2. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

(i) $f(x^2 - 4x) \geq f(x - 6)$

(ii) $f(\ln x) \leq f(1)$

(iii) $f(e^{2-x} + 3) < f(4)$

(iv) $f(\ln(x^2 + 1)) > f(\ln 5)$

3. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

(i) $f(x^2 - 3x) = f(2x - 6)$

(ii) $f(\ln x + 2) = f(3)$

4. Μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και $f(1) - f(3) > 0$.

(i) Να βρείτε τη μονοτονία της f.

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - x) > f(2x - 2)$.

(iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{-x} - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

(i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$.

(iii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{-x} - 1 \geq x$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x + x^5 + x^3 + x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x - x^3 - \ln x$$

(i) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως μονότονες.

(ii) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$.

7. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

(i) $x^3 \geq 1 - \ln x$

(ii) $\dfrac{1}{x} \leq \ln x + 1$

(iii) $e^{1-x} > 1 + \ln x$

(iv) $e^x + 2\ln x < e$

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$f(4-x) + f(2+x) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) > f(2)$$

Να λύσετε:

(i) την εξίσωση $f(x) = 0$,

(ii) την ανίσωση $f(x^2 - 6) > 0$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(5) < f(4)$.

(i) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(1), f(3)$.

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x) < f(1)$.

(iii) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(3) > f(5) + f(7)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + x - 1$$

(i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(iii) Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x > 1$.

(iv) Να βρείτε το πρόσημο της f.

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(i) $x^{11} + 2x^7 + 3x^5 + 5x^3 + 7x < 18$

(ii) $συνx - ημx - 2εφx - x - 1 < 0, \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(iii) $3^x + 4^x + 5^x > 6^x$

(iv) $\ln \dfrac{3^x + 4^x}{5^x} < e^{5^x} - e^{3^x + 4^x}$

Πηγή: «Μαθηματικά Γ Λυκείου» Στεργίου κ.α. - Εκδόσεις Σαββάλας