1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi,$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ / ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και λέγεται **τετράγωνο** του $\vec{\alpha}$. Έχουμε:

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\sigma\upsilon\nu 0 = |\vec{\alpha}|^2.$$

ΤΥΠΟΣ / ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$$

Ειδικότερα, για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύουν:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0 \quad \text{και} \quad \vec{i}^2=\vec{j}^2=1$$

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

ΤΥΠΟΣ / ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

«Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{a}=(-3,4)$ και $\vec{b}=(2,-1)$ είναι:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-3)\cdot 2 + 4(-1) = -10.$$

Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου θα αποδείξουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ / ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

- $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$
- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$ όπου $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$, εφόσον $\vec{\alpha},\vec{\beta} \nparallel y'y$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|συν\theta$ και επομένως,

$$συν\theta = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}.$$

Είναι όμως

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2, \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2} \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

Επομένως,

ΤΥΠΟΣ / ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

$$συν\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για παράδειγμα, αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,1)$, τότε:

$$συν\theta = \frac{1\cdot3+2\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ οπότε } \theta = \frac{\pi}{4}.$$