1.1 Η έννοια του διανύσματος

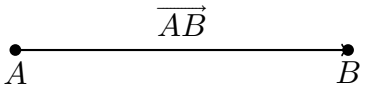
Ορισμός του διανύσματος

Ορισμός

Στη Γεωμετρία, **διάνυσμα** είναι ένα **προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα**.
Το πρώτο άκρο ονομάζεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο άκρο ονομάζεται **πέρας** του διανύσματος.
Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$$

Το διάνυσμα παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινά από την αρχή του και καταλήγει στο πέρας του.



Μηδενικό διάνυσμα

Μηδενικό διάνυσμα

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**.
Για παράδειγμα,

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Μέτρο διανύσματος

Μέτρο

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζεται με

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

Αν

$$|\vec{u}| = 1,$$

τότε το $\vec{u}$ λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**.

Φορέας διανύσματος

Φορέας

Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **φορέας** του διανύσματος.

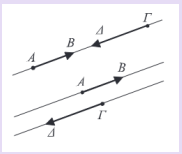
Αν ο φορέας του $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ, γράφουμε

$$\overrightarrow{AB} \parallel \zeta.$$

Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα

Παράλληλα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά**, όταν έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν ίδια διεύθυνση και γράφουμε



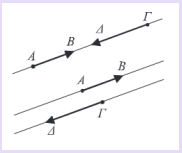
$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε **ομόρροπα** και **αντίρροπα**.

Ομόρροπα διανύσματα

Ομόρροπα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι **ομόρροπα**, όταν
α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή
β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη.
Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε

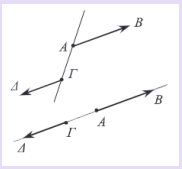


$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Αντίρροπα διανύσματα

Αντίρροπα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά) και γράφουμε:



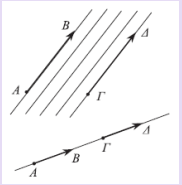
$$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Ίσα διανύσματα

Ίσα διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα**, όταν έχουν

- την ίδια κατεύθυνση και
- ίσα μέτρα.



Γράφουμε:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Όλα τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.

Χρήσιμες συνέπειες

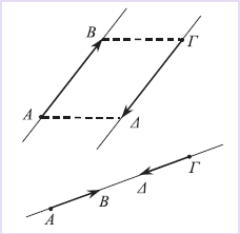
i. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
ii. Αν M είναι το μέσο του AB, τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.

Αντίθετα διανύσματα

Αντίθετα διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν

- αντίθετη κατεύθυνση και
- ίσα μέτρα.



Αν τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίθετα, τότε

$$\boxed{\vec{u} = -\vec{v}}.$$

Ειδικότερα:

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$$

Γωνία δύο διανυσμάτων

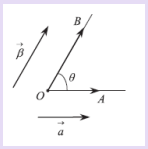
Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Με κοινή αρχή ένα σημείο O παίρνουμε

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$

Γωνία δύο διανυσμάτων

Η κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ ονομάζεται **γωνία των διανυσμάτων** $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Συμβολίζεται με

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \theta.$$



Ισχύει:

$$\boxed{0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ}$$

ή, σε ακτίνια,

$$\boxed{0 \leq \theta \leq \pi.}$$

Ειδικότερα:

$$\theta = 0^\circ \iff \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v},$$

$$\theta = 180^\circ \iff \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}.$$

Αν

$$\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2},$$

τότε λέμε ότι τα διανύσματα είναι **κάθετα** ή **ορθογώνια**:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}.}$$

Για το μηδενικό διάνυσμα μπορούμε να θεωρήσουμε ως γωνία με οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα οποιαδήποτε γωνία θ με

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

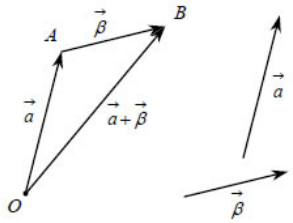
Πρόσθεση διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Παίρνουμε ένα σημείο O και κατασκευάζουμε

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}.$$

Στη συνέχεια, με αρχή το A, κατασκευάζουμε

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}.$$



Άθροισμα διανυσμάτων

Το διάνυσμα

$$\overrightarrow{OB}$$

λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται:

$$\boxed{\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OB}.}$$

Πρακτικά, για να προσθέσουμε δύο διανύσματα, τοποθετούμε την αρχή του δεύτερου διανύσματος στο πέρας του πρώτου. Τότε, το άθροισμά τους είναι το διάνυσμα που ενώνει την αρχή του πρώτου με το πέρας του δεύτερου.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον λεγόμενο **κανόνα του παραλληλογράμμου**

Κανόνας του παραλληλογράμμου

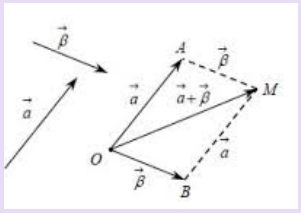
Κανόνας του παραλληλογράμμου

Αν τα δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν κοινή αρχή O, τότε το άθροισμά τους παριστάνεται από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που έχει ως προσκείμενες πλευρές τα δύο διανύσματα. Αν

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{\beta},$$

και M είναι η απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου, τότε

$$\boxed{\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OM}.}$$



Ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$\boxed{(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})}$$

Ουδέτερο στοιχείο

$$\boxed{\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}}$$

Αντίθετο διάνυσμα

$$\boxed{\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}}$$

Επομένως, το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων δεν εξαρτάται ούτε από τη σειρά των προσθετέων ούτε από τον τρόπο ομαδοποίησής τους.

Πρόσθεση περισσότερων διανυσμάτων

Για να προσθέσουμε πολλά διανύσματα, τα τοποθετούμε διαδοχικά, ώστε το πέρας κάθε διανύσματος να είναι η αρχή του επόμενου. Το άθροισμα είναι το διάνυσμα που έχει:

- αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος,
- πέρας το πέρας του τελευταίου διανύσματος.

Έτσι:

$$\boxed{\vec{u}_1+\vec{u}_2+\cdots+\vec{u}_n}$$

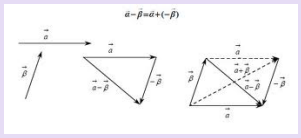
είναι το διάνυσμα που ενώνει την αρχή του $\vec{u}_1$ με το πέρας του $\vec{u}_n$.

Αφαίρεση διανυσμάτων

Ορισμός της αφαίρεσης

Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο του $\vec{\beta}$.
Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})}$$



Αν έχουμε δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο ώστε $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}\\
\Leftrightarrow\ &(-\vec{\beta})+(\vec{\beta}+\vec{x})=(-\vec{\beta})+\vec{\alpha}\\
\Leftrightarrow\ &\vec{0}+\vec{x}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})\\
\Leftrightarrow\ &\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}
\end{aligned}$$

Διάνυσμα θέσεως

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου.

Διάνυσμα θέσεως

Για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται το διάνυσμα

$$\overrightarrow{OM}.$$

Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται **διάνυσμα θέσεως** ή **διανυσματική ακτίνα** του σημείου M.
Το σταθερό σημείο O ονομάζεται **σημείο αναφοράς**.

Έκφραση διανύσματος με διανύσματα θέσεως

Για οποιαδήποτε σημεία A και B ισχύει:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

Άρα:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.}$$

Βασικός κανόνας

Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με:

$$\boxed{\text{διανυσματική ακτίνα του πέρατος} - \text{διανυσματική ακτίνα της αρχής.}}$$

Δηλαδή:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.}$$

Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων

Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η **τριγωνική ανισότητα**:

Τριγωνική ανισότητα

$$\boxed{\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}$$

Βασικές σχέσεις που πρέπει να γνωρίζουμε

Βασικές σχέσεις

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AA} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}}$$

Σύνοψη θεωρίας

Τι πρέπει να θυμάμαι

1. Διάνυσμα είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα.
2. Κάθε διάνυσμα χαρακτηρίζεται από:
   - μέτρο,
   - διεύθυνση,
   - φορά.
3. Δύο διανύσματα είναι ίσα όταν έχουν ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.
4. Δύο διανύσματα είναι αντίθετα όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.
5. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων μπορεί να βρεθεί είτε με τα διαδοχικά διανύσματα, είτε με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.
6. Η αφαίρεση διανυσμάτων μετατρέπεται σε πρόσθεση:
$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$
7. Αν O είναι σημείο αναφοράς:
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$
8. Για το μέτρο του αθροίσματος ισχύει:
$$\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|.$$