1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ορισμός

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του αριθμού λ με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με

$$\lambda \cdot \vec{\alpha} \quad \text{ή απλώς} \quad \lambda\vec{\alpha},$$

ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$,
- είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$,
- έχει μέτρο
$$|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda|\,|\vec{\alpha}|.$$

Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, ορίζουμε
$$\lambda\vec{\alpha} = \vec{0}.$$

Βασικές παρατηρήσεις

Για το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$ ισχύουν τα εξής:

- Αν $\lambda > 0$, το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$.
- Αν $\lambda < 0$, το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$.
- Το μέτρο του γινομένου είναι
$$|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda|\,|\vec{\alpha}|.$$
- Αν $|\lambda| > 1$, το μέτρο του γινομένου είναι μεγαλύτερο από το μέτρο του αρχικού διανύσματος.
- Αν $0 < |\lambda| < 1$, το μέτρο του γινομένου είναι μικρότερο από το μέτρο του αρχικού διανύσματος.

Παράδειγμα

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, τότε
$$|3\vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}| = 6$$
και το $3\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$.
Αντίστοιχα,
$$|-3\vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}| = 6$$
και το $-3\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$.

Για $\lambda \neq 0$, το γινόμενο $\frac{1}{\lambda}\vec{\alpha}$ συμβολίζεται και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

2. Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα

Βασικές ιδιότητες

Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν:

$$\boxed{\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}} \quad (1)$$

$$\boxed{(\lambda+\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}} \quad (2)$$

$$\boxed{\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}} \quad (3)$$

Προσοχή

Στην ιδιότητα (1), ο αριθμός λ πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα του αθροίσματος.
Στην ιδιότητα (2), ο αριθμός $\lambda + \mu$ πολλαπλασιάζει το ίδιο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
Στην ιδιότητα (3), ο διαδοχικός πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με δύο αριθμούς ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του με το γινόμενο των αριθμών.

Χρήσιμες συνέπειες

Από τον ορισμό και τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν:

$$\boxed{\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ ή } \vec{\alpha} = \vec{0}}$$

$$\boxed{(-\lambda)\vec{\alpha} = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})}$$

$$\boxed{\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}}$$

$$\boxed{(\lambda-\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}}$$

Αν

$$\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \lambda \neq 0,$$

τότε

$$\boxed{\vec{\alpha} = \vec{\beta}}.$$

Αν

$$\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \neq \vec{0},$$

τότε

$$\boxed{\lambda = \mu}.$$

3. Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Ορισμός

Ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\boxed{\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}}, \qquad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αντίστοιχα, γραμμικός συνδυασμός τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\boxed{\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma}}, \qquad \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Παραδείγματα

Τα διανύσματα

$$\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$$

και

$$\vec{\delta} = -2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$$

είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Επίσης, το διάνυσμα

$$\vec{v} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Χρήσιμη παρατήρηση

Για να απλοποιήσουμε έναν γραμμικό συνδυασμό, εφαρμόζουμε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα και τις ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων.

4. Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Θεώρημα

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε

$$\boxed{\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Δηλαδή, δύο διανύσματα είναι παράλληλα αν και μόνο αν το ένα είναι γινόμενο του άλλου με έναν πραγματικό αριθμό.

Περιπτώσεις

Αν $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε:

- Αν $\lambda > 0$, τα διανύσματα είναι ομόρροπα.
- Αν $\lambda < 0$, τα διανύσματα είναι αντίρροπα.
- Αν $\lambda = 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

5. Διανυσματική ακτίνα του μέσου τμήματος

Θεώρημα

Έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και O ένα οποιοδήποτε σημείο αναφοράς. Τότε ισχύει:

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}}$$

Δηλαδή, το διάνυσμα θέσεως του μέσου ενός τμήματος είναι ο ημιάθροισμα των διανυσμάτων θέσεως των άκρων του.

Απόδειξη

Επειδή το M είναι μέσο του AB, έχουμε

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}.$$

Με τη βοήθεια των διανυσμάτων θέσεως γράφουμε:

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}.$$

Με αναδιάταξη των όρων προκύπτει:

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Επομένως,

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}}.$$

6. Βασικά συμπεράσματα

Τύποι που πρέπει να γνωρίζω

$$\boxed{|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda|\,|\vec{\alpha}|}$$

$$\boxed{\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}}$$

$$\boxed{(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}}$$

$$\boxed{\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}}$$

$$\boxed{\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}} \qquad (\vec{\beta} \neq \vec{0})$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}} \qquad (M \text{ μέσο του } AB)$$