Ενότητα 1.4: Συντεταγμένες στο επίπεδο

Ορισμός άξονα

Πάνω σε μια ευθεία $x'x$ επιλέγουμε δύο σημεία O και I, έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{OI}$ να έχει μέτρο 1 και να βρίσκεται στην ημιευθεία Ox.
Τότε λέμε ότι έχουμε έναν **άξονα** με:

- αρχή το σημείο O,
- μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.

Η ημιευθεία Ox λέγεται **θετικός ημιάξονας**, ενώ η ημιευθεία Ox' λέγεται **αρνητικός ημιάξονας**.

Τετμημένη σημείου

Αν M είναι ένα σημείο του άξονα $x'x$, τότε υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i}}.$$

Ο αριθμός x λέγεται **τετμημένη** του σημείου M.
Το σημείο συμβολίζεται με $M(x)$.
Σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο $M(x)$ του άξονα και αντιστρόφως.

2. Καρτεσιανό επίπεδο

Ορισμός ορθοκανονικού συστήματος

Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$, αντίστοιχα.
Το σύστημα αυτό ονομάζεται **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων** ή **καρτεσιανό επίπεδο** και συμβολίζεται με Oxy.
Ονομάζεται:

- **ορθογώνιο**, επειδή οι δύο άξονες είναι κάθετοι,
- **κανονικό**, επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ έχουν ίσα μέτρα.

Συντεταγμένες σημείου

Έστω M ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου.
Η τετμημένη του συμβολίζεται με x και η τεταγμένη του με y. Οι δύο αριθμοί ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου M.
Το σημείο συμβολίζεται με

$$\boxed{M(x, y)}.$$

Σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ένα μοναδικό διατεταγμένο ζεύγος (x, y) και σε κάθε τέτοιο ζεύγος αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου.

Προσοχή στη σειρά

Στο σημείο $M(x, y)$:

- ο πρώτος αριθμός x είναι η τετμημένη,
- ο δεύτερος αριθμός y είναι η τεταγμένη.

3. Συντεταγμένες διανύσματος

Αναπαράσταση διανύσματος

Έστω $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου και $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$.
Αν το σημείο A έχει συντεταγμένες (x, y), τότε

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2},$$

όπου A_1, A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$, αντίστοιχα.
Επειδή

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}, \qquad \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j},$$

προκύπτει

$$\boxed{\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}}.$$

Συντεταγμένες διανύσματος

Αν

$$\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

τότε οι αριθμοί x, y λέγονται συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

- Ο x λέγεται τετμημένη του διανύσματος.
- Ο y λέγεται τεταγμένη του διανύσματος.

Το διάνυσμα συμβολίζεται με το διατεταγμένο ζεύγος

$$\boxed{\vec{\alpha} = (x, y)}.$$

Μοναδικότητα

Κάθε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\boxed{\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}}.$$

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες:

$$\boxed{(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2}.$$

4. Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων

Πρόσθεση διανυσμάτων

Αν

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \qquad \vec{\beta} = (x_2, y_2),$$

τότε

$$\boxed{\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)}.$$

Δηλαδή, προσθέτουμε τις ομόλογες συντεταγμένες.

Πολλαπλασιασμός με αριθμό

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\boxed{\lambda\vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)}.$$

Δηλαδή, πολλαπλασιάζουμε κάθε συντεταγμένη με τον αριθμό λ.

Γραμμικός συνδυασμός

Αν

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \qquad \vec{\beta} = (x_2, y_2),$$

τότε

$$\boxed{\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2,\ \lambda y_1 + \mu y_2)}.$$

Παράδειγμα

Έστω

$$\vec{\alpha} = (1, -1), \qquad \vec{\beta} = (1, 2).$$

Τότε:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (1 + 1, -1 + 2) = (2, 1),$$
$$2\vec{\alpha} = 2(1, -1) = (2, -2),$$
$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (1 - 1, -1 - 2) = (0, -3),$$
$$2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (2, -2) - (1, 2) = (1, -4).$$

5. Συντεταγμένες μέσου τμήματος

Τύπος μέσου

Έστω τα σημεία

$$A(x_1, y_1), \qquad B(x_2, y_2)$$

και $M(x, y)$ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.
Τότε οι συντεταγμένες του μέσου M δίνονται από τους τύπους

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}}, \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}.$$

Επομένως,

$$\boxed{M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)}.$$

Παράδειγμα

Έστω $A(2,3)$ και $B(6,7)$.
Το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες

$$x_M = \frac{2+6}{2} = 4, \qquad y_M = \frac{3+7}{2} = 5.$$

Άρα

$$\boxed{M(4,5)}.$$

6. Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα

Τύπος συντεταγμένων διανύσματος

Έστω δύο σημεία

$$A(x_1, y_1), \qquad B(x_2, y_2).$$

Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\boxed{x = x_2 - x_1}, \qquad \boxed{y = y_2 - y_1}.$$

Επομένως,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)}.$$

Κανόνας υπολογισμού

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, αφαιρούμε:

- την τετμημένη του A από την τετμημένη του B,
- την τεταγμένη του A από την τεταγμένη του B.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A)}$$

Παράδειγμα

Έστω $A(1,2)$ και $B(3,7)$.
Τότε

$$\overrightarrow{AB} = (3-1, 7-2) = (2,5).$$

Άρα

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (2,5)}.$$

7. Μέτρο διανύσματος και απόσταση σημείων

Μέτρο διανύσματος

Αν ένα διάνυσμα έχει συντεταγμένες

$$\vec{\alpha} = (x, y),$$

τότε το μέτρο του δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Παράδειγμα

Αν $\vec{\alpha} = (5, 12)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Απόσταση δύο σημείων

Έστω τα σημεία

$$A(x_1, y_1), \qquad B(x_2, y_2).$$

Επειδή η απόσταση AB είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, έχουμε

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Παράδειγμα

Έστω $A(2, -7)$ και $B(5, -3)$.Τότε

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (-3+7)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

8. Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Συνθήκη παραλληλίας

Έστω

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \qquad \vec{\beta} = (x_2, y_2).$$

Τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα αν και μόνο αν

$$\boxed{x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0}.$$

Ισοδύναμα, αν

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

τότε

$$\boxed{\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0}.$$

Υπολογισμός ορίζουσας

Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, ισχύει

$$\boxed{\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = x_1 y_2 - y_1 x_2}.$$

Αν η ορίζουσα είναι μηδέν, τα διανύσματα είναι παράλληλα. Αν η ορίζουσα είναι διαφορετική από το μηδέν, τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

Παράδειγμα

Έστω $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 2)$.Τότε:

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3(-1) = 7 \neq 0.$$

Άρα, τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

Εφαρμογή στη συνευθειακότητα

Τρία σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα.
Επομένως, αν

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad \Gamma(x_3, y_3),$$

η συνευθειακότητα ελέγχεται από τη συνθήκη

$$\boxed{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0}.$$

9. Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος

Ορισμός

Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ με $x \neq 0$. Ο λόγος

$$\boxed{\lambda = \frac{y}{x}}$$

ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** του διανύσματος $\vec{\alpha}$.
Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον θετικό ημιάξονα Ox, τότε

$$\boxed{\lambda = \frac{y}{x} = \tan\varphi}.$$

Περιπτώσεις

- Αν $y = 0$, το διάνυσμα είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ και ο συντελεστής διεύθυνσης είναι
$$\lambda = 0.$$
- Αν $x = 0$, το διάνυσμα είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$ και ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται.

Παραλληλία μέσω συντελεστών διεύθυνσης

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \qquad \vec{\beta} = (x_2, y_2),$$

με ορισμένους συντελεστές διεύθυνσης

$$\lambda_1 = \frac{y_1}{x_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{y_2}{x_2}.$$

Τότε τα διανύσματα είναι παράλληλα αν και μόνο αν

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2}.$$

10. Συγκεντρωτικός πίνακας τύπων

Τύποι που πρέπει να γνωρίζω

1. Συντεταγμένες σημείου

$$M(x, y)$$

2. Συντεταγμένες διανύσματος

$$\vec{\alpha} = (x, y)$$

3. Πρόσθεση διανυσμάτων

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

4. Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

5. Γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2,\ \lambda y_1 + \mu y_2)$$

6. Μέσο τμήματος

$$\boxed{M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

7. Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

8. Μέτρο διανύσματος

$$\boxed{|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

9. Απόσταση δύο σημείων

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

10. Συνθήκη παραλληλίας (Ορίζουσα)

$$\boxed{\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0}$$

11. Συντελεστής διεύθυνσης

$$\boxed{\lambda = \frac{y}{x} = \tan\varphi, \quad x \neq 0}$$

12. Συνθήκη παραλληλίας αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$ (Συντελεστές διεύθυνσης)

$$\boxed{\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_a = \lambda_\beta}$$