

Γεωμετρία Β' Λυκείου - Ασκήσεις από την Τράπεζα Θεμάτων Κεφάλαια 10.4-10.5
Λύσεις

ΘΕΜΑ 2 / 17346

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot \sin \hat{B}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{B} = 60^\circ$, άρα

$$ΑΓ^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \sin 60^\circ \text{ ή } ΑΓ^2 = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2} \text{ ή } ΑΓ^2 = 28 \text{ ή } ΑΓ = 2\sqrt{7}.$$

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ABΓ είναι η AB, αφού $ΑΒ = 6 = 2 \cdot 3 > 2\sqrt{7} = ΑΓ$, άρα η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου είναι η $\hat{\Gamma}$, γιατί βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά. Όμως $ΑΒ^2 = 6^2 = 36$ και $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = (2\sqrt{7})^2 + 4^2 = 28 + 16 = 44$, άρα $ΑΒ^2 < ΑΓ^2 + ΒΓ^2$. Επομένως $\hat{\Gamma} < 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο.

γ) Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου ABΓ χρησιμοποιούμε τον τύπο

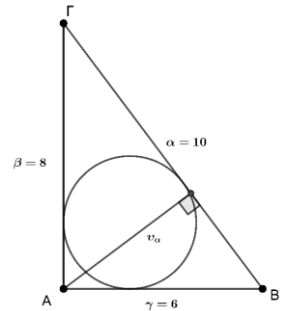
$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot \eta\mu \hat{B}.$$

Όμως $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{B} = 60^\circ$, άρα $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \eta\mu 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 2 / 21196

α) Το εμβαδό του ορθογώνιου τριγώνου ABΓ υπολογίζεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma$ όπου β και γ οι κάθετες πλευρές του, επομένως αντικαθιστώντας τα μήκη των πλευρών β και γ του τριγώνου έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 24.$$



β)

i. Το μήκος της υποτείνουσας α του ορθογώνιου τριγώνου προσδιορίζεται με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος, επομένως:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \text{ άρα } \alpha = \sqrt{100} = 10.$$

ii. Το εμβαδό του ορθογώνιου τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \rho_a$.

Αντικαθιστώντας την τιμή του εμβαδού $E = 24$ από το πρώτο ερώτημα και το μήκος της πλευράς $\alpha = 10$ στον παραπάνω τύπο προκύπτει:

$$24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \rho_a \text{ ή } \rho_a = \frac{24}{5}.$$

iii. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε το εμβαδό του E είναι $E = \tau \cdot \rho$. Η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ABΓ είναι:

$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{10 + 8 + 6}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του εμβαδού $E = 24$ και της ημιπεριμέτρου $\tau = 12$ στον τύπο $E = \tau \cdot \rho$ έχουμε:

$$24 = 12 \cdot \rho \text{ ή } \rho = 2.$$

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $B\Gamma = 7$ και $\hat{A} = 60^\circ$, οπότε από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sin A$$

$$7^2 = 8^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot 8 \cdot A\Gamma \cdot \sin 60^\circ$$

$$49 = 64 + A\Gamma^2 - 16 \cdot A\Gamma \cdot \frac{1}{2}$$

$$A\Gamma^2 - 8 \cdot A\Gamma + 15 = 0$$

$$A\Gamma = 3 \text{ ή } A\Gamma = 5.$$

β) i) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $B\Gamma = 7$ και $A\Gamma = 3$ ή $A\Gamma = 5$, άρα η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η $AB = 8$, οπότε $AB^2 = 8^2 = 64$.

Αν $A\Gamma = 3$ θα είναι $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$, οπότε

$AB^2 > A\Gamma^2 + B\Gamma^2$, άρα $\hat{\Gamma} > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο, άτοπο.

Αν $A\Gamma = 5$ θα είναι $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, οπότε

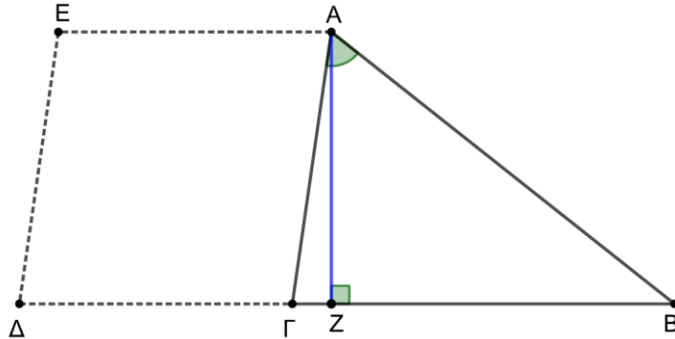
$AB^2 < A\Gamma^2 + B\Gamma^2$, άρα $\hat{\Gamma} < 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο.

Επομένως $A\Gamma = 5$.

ii) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = 8$, $A\Gamma = 5$ και $\hat{A} = 60^\circ$, οπότε από τον τριγωνομετρικό τύπο του εμβαδού έχουμε

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Gamma \cdot AB \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

iii) Έστω AZ το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A . Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου $A\Gamma\Delta E$ με αντίστοιχη βάση την $\Gamma\Delta$. Είναι $\Gamma\Delta = A\Gamma = 5$ επειδή το $A\Gamma\Delta E$ είναι ρόμβος.



Από το (β ii) είναι $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$. Επειδή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AZ$ και $B\Gamma = 7$, θα έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AZ = 10\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AZ = 10\sqrt{3}$$

$$AZ = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου $A\Gamma\Delta E$ είναι

$$(A\Gamma\Delta E) = \Gamma\Delta \cdot AZ = 5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7}.$$

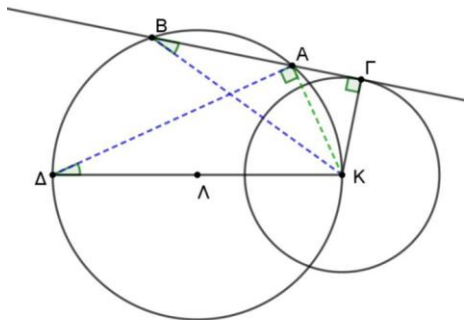
α)

- i. Οι γωνίες $\widehat{KB\Gamma}$ και $\widehat{K\Delta A}$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ, R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο KA , άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓB είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο του Γ , επομένως η γωνία $\widehat{K\Gamma B}$ είναι ορθή. Η $K\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ, R) και η γωνία $\widehat{K\Delta A}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή. Τα τρίγωνα $K\Gamma B$ και $K\Delta A$ έχουν $\widehat{K\Gamma B} = \widehat{K\Delta A}$ (ορθές) και $\widehat{KB\Gamma} = \widehat{K\Delta A}$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.
- ii. Η $K\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ, R) , άρα $K\Delta = 2 \cdot R = 20$ και η $K\Gamma$ είναι ακτίνα του κύκλου (K, ρ) , άρα $K\Gamma = \rho = 6$. Εφόσον τα τρίγωνα $K\Gamma B$ και $K\Delta A$ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή $\frac{K\Gamma}{KA} = \frac{KB}{K\Delta} = \frac{\Gamma B}{\Delta A}$. Από την ισότητα $\frac{K\Gamma}{KA} = \frac{KB}{K\Delta}$ έχουμε ότι

$$\frac{6}{KA} = \frac{KB}{20} \text{ ή } KA \cdot KB = 120.$$

β) Αφού είναι $KB = 15$ και $KA \cdot KB = 120$ τότε $15 \cdot KA = 120$, άρα $KA = 8$. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $K\Delta A$ έχουμε $K\Gamma^2 + \Gamma A^2 = KA^2$ ή $36 + \Gamma A^2 = 64$ ή $\Gamma A^2 = 28$ ή $\Gamma A = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Το

εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $A\Gamma K$ είναι $(A\Gamma K) = \frac{K\Gamma \cdot AK}{2} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 6\sqrt{7}$.



ΘΕΜΑ 4 / 22101

α)

- i. Για την εύρεση του εμβαδού του τριγώνου χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} AB \cdot AG \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 \cdot \eta\mu 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

- ii. Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13.$$

$$\text{Άρα, } B\Gamma = \sqrt{13}.$$

β) Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 \cdot \eta\mu A = 6 \cdot \eta\mu A.$$

Για την γωνία A του τριγώνου ισχύει ότι $0^\circ < A < 180^\circ$, άρα $0 < \eta\mu A \leq 1$. Η μέγιστη τιμή του $\eta\mu A$ είναι 1, όταν η γωνία A είναι 90° . Επομένως, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν η γωνία A είναι ορθή και η μέγιστη τιμή του είναι $E = 6 \cdot 1 = 6$ τ.μ.

Λόγος Εμβαδών

ΘΕΜΑ 2 / 16127

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι

$$E = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36.$$

β) i) Ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων ABΓ και A'B'Γ' είναι

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

ii) Έστω E' το εμβαδόν του τριγώνου A'B'Γ'. Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε θα έχουμε

$$\frac{E}{E'} = \lambda^2 \quad \text{ή} \quad \frac{36}{E'} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \frac{4 \cdot 9}{E'} = \frac{9}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{4}{E'} = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad E' = 16.$$

ΘΕΜΑ 2 / 21120

α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα AΔΕ και ABΓ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων AΔΕ και ABΓ θα είναι

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad (A\Delta E) = \frac{1}{2} (AB\Gamma).$$

β) Δίνεται ότι $(AB\Gamma) = 2$, οπότε από το ερώτημα α) i) είναι $(A\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Επίσης το εμβαδόν του τραπέζιου BΓΕΔ θα είναι $(B\Gamma E\Delta) = (AB\Gamma) - (A\Delta E) = 2 - 1 = 1$.

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον το ΑΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα

ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με $\frac{AB}{AD} = \frac{AG}{AE} = \frac{BG}{DE}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AB+BD} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους,

άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως η περίμετρος του ΑΔΕ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του ΑΒΓ, δηλαδή είναι ίση με $3 \cdot 8,5 = 25,5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΔΕ) των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και

ΑΔΕ, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$. Δηλαδή:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(ADE)} = \frac{1}{9} \text{ ή } (AB\Gamma) = \frac{(ADE)}{9} \text{ ή } (AB\Gamma) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

α) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η α. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς α.

$$\beta^2 + \gamma^2 = 8^2 + 15^2 \text{ ή } \beta^2 + \gamma^2 = 64 + 225 \text{ ή } \beta^2 + \gamma^2 = 289$$

$$\alpha^2 = 17^2 \text{ ή } \alpha^2 = 289$$

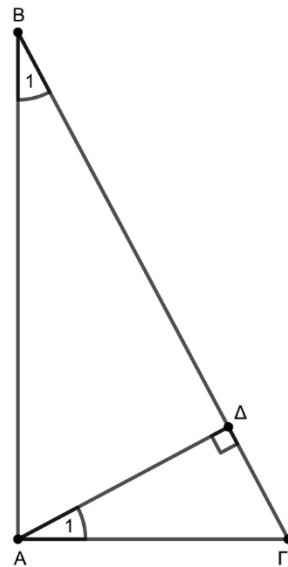
Άρα $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $\alpha=17$ και $\hat{A}=90^\circ$.

β)

i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια με $\widehat{B} = \widehat{A}_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους θα είναι ίσος με το λόγο των υποτεινουσών τους. Δηλαδή $\lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{15}{8}$.

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αφού είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι αυτά είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{15}{8}$.

$$\text{Άρα } \frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}.$$



ΘΕΜΑ 4 / 16732

Τα τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία $\widehat{K}$. Οπότε έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.

β) Τα όμοια τρίγωνα MKB και $\Delta K\Gamma$ έχουν λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{MB}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}$.

Οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου

ομοιότητάς τους, δηλαδή: $\frac{(MKB)}{(\Delta K\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

$$\text{Συνεπώς } (MKB) = \frac{1}{4} (\Delta K\Gamma).$$

Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και MKB είναι ίσα αφού έχουν

- $AM = MB$, το M είναι μέσο της AB
- $\widehat{AM} = \widehat{BK} = 90^\circ$
- $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα, θα είναι και ισεμβαδικά, δηλαδή $(AM\Delta) = (MKB)$ (1).

Για το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta K\Gamma$ έχουμε:

$$(\Delta K\Gamma) = (\Delta MB\Gamma) + (MKB) = (\Delta MB\Gamma) + (AM\Delta) = (AB\Gamma\Delta), \text{ λόγω της σχέσης (1)}$$

Για το εμβαδόν του $MB\Gamma\Delta$ έχουμε: $(MB\Gamma\Delta) = (\Delta K\Gamma) - (MKB) = (\Delta K\Gamma) - \frac{1}{4} (\Delta K\Gamma)$, λόγω

του β) ερωτήματος.

$$\text{Άρα } (MB\Gamma\Delta) = \frac{3}{4} (AB\Gamma\Delta)$$

δ) Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α . Τότε $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$ και $(MB\Gamma\Delta) = 75$.

Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι: $75 = \frac{3}{4} \alpha^2$ ή $\alpha^2 = \frac{4}{3} \cdot 75$ ή $\alpha^2 = 100$.

$$\text{Άρα } \alpha = 10 \text{ m}$$

α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = B\Gamma$. Άρα, οι γωνίες $\hat{B}$ και $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ θα είναι ίσες, ως προσκείμενες στη βάση AB .

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta A$ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \hat{B}$ (η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι προσκείμενη στη βάση AB του ισοσκελούς $AB\Gamma$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι προσκείμενη στη βάση $B\Delta$ του ισοσκελούς $AB\Delta$).

Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια.

γ) Αφού τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ και $\hat{B}$ αντίστοιχα, δηλαδή είναι

$$\frac{B\Gamma}{A\Delta} = \frac{3}{2}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)} = \left(\frac{B\Gamma}{A\Delta}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

α) Για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ έχουμε

- $A\Gamma$ είναι κοινή πλευρά.
- $AB = \Gamma\Delta$ αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- $B\Gamma = A\Delta$ αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

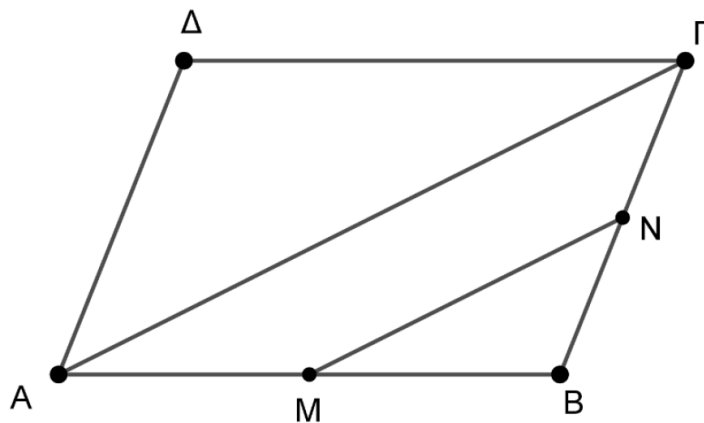
συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta)$

τότε

$$(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (AB\Gamma) = 2(AB\Gamma)$$

δηλαδή

$$(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (AB\Gamma\Delta)$$



β) Αφού τα M, N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τότε

$$MA = MB = \frac{AB}{2} \text{ και } BN = N\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$$

Τα τρίγωνα BMN και $AB\Gamma$ έχουν την γωνία $\hat{B}$ κοινή, επομένως

$$\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{MB \cdot BN}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{AB}{2} \cdot \frac{B\Gamma}{2}}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{AB \cdot B\Gamma}{4 \cdot AB \cdot B\Gamma} = \frac{1}{4}, \text{ δηλαδή } \frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$$

γ) Από το (β) ερώτημα έχουμε

$$\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4} \text{ ή } (BMN) = \frac{1}{4} \cdot (AB\Gamma)$$

επειδή από το (α) ερώτημα έχουμε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot (AB\Gamma\Delta)$, τότε θα είναι

$$(BMN) = \frac{1}{4} \cdot (AB\Gamma) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{8} \cdot (AB\Gamma\Delta)$$

α) Είναι $\widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{E\hat{A}Z} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ και άρα οι γωνίες $BA\Gamma$ και EAZ είναι παραπληρωματικές. Γνωρίζουμε όμως ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα $\frac{(AB\Gamma)}{(EAZ)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{AE \cdot AZ} = 1$ οπότε $(AB\Gamma) = (EAZ)$.

β)

- i. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $(AB\Gamma) = (EAZ)$ και από υπόθεση είναι $(EZ\Gamma B\Delta) = 54$. Είναι $(AB\Gamma) + (AB\Delta E) + (AEZ) + (A\Gamma H Z) = (EZ\Gamma B\Delta)$ ή $(AB\Gamma) + 36 + (AB\Gamma) + 9 = 54$ ή $2 \cdot (AB\Gamma) = 9$ ή $(AB\Gamma) = \frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu\hat{A} = \frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \eta\mu\hat{A} = \frac{9}{2}$ ή $\eta\mu\hat{A} = \frac{1}{2}$ και εφόσον η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία, έχουμε ότι $\hat{A} = 30^\circ$.

- ii. Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \cos 30^\circ = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 45 - 18\sqrt{3}$$

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι $E = B\Gamma^2 = 45 - 18\sqrt{3}$.