

## Θεωρία

Μήκος κύκλου:  $L = 2\pi R$

Μήκος τόξου:  $l = \frac{\pi R \mu}{180}$

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου:  $E = \pi R^2$

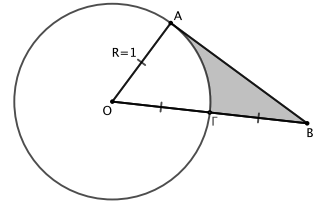
Εμβαδόν κυκλικού τομέα:  $(O \widehat{AB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$

### ΘΕΜΑ 2 / 22046

Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R = 1$ . Θεωρούμε ακτίνα  $OG$  την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα  $GB = OG = R$  και το εφαπτόμενο τμήμα  $BA$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{OBA} = 30^\circ$ . (β) Να αποδείξετε ότι  $AB = \sqrt{3}$ .

(γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου  $ABG$ .



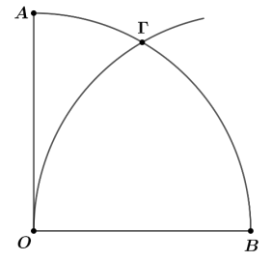
### ΘΕΜΑ 2 / 21192

Δίνεται τεταρτοκύκλιο  $O \widehat{AB}$  κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$ . Αν ο κύκλος κέντρου  $B$  και ακτίνας  $R$  τέμνει το τόξο  $\widehat{AB}$  στο σημείο  $\Gamma$  όπως στο σχήμα, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $OBG$  είναι ισόπλευρο και το μήκος  $\ell_{BG}$  του τόξου  $\widehat{BG}$  είναι  $\ell_{BG} = \frac{\pi \cdot R}{3}$ .

(β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου  $\widehat{AG}$  είναι  $\ell_{AG} = \frac{\pi \cdot R}{6}$ .

(γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου  $OAG$  που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα  $OA$  και τα τόξα  $\widehat{AG}$  και  $\widehat{OG}$ .

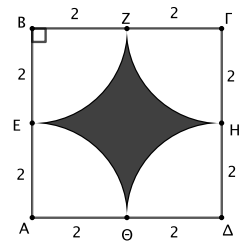


### ΘΕΜΑ 2 / 18098

Δίνεται τετράγωνο  $ABGD$  πλευράς  $a = 4$ . Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα  $\rho = 2$  σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι  $E = 4(4 - \pi)$

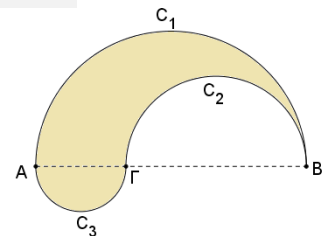


### ΘΕΜΑ 2 / 20672

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 6$ , και σημείο του  $\Gamma$ , ώστε  $B\Gamma = 4$ . Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AB$  σχεδιάζουμε τα ημικύκλια  $C_1$  και  $C_2$  με διαμέτρους  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο  $C_3$  με διάμετρο  $A\Gamma$ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  είναι  $\frac{9\pi}{2}$ ,  $2\pi$  και  $\frac{\pi}{2}$  αντίστοιχα.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



### ΘΕΜΑ 2 / 22310

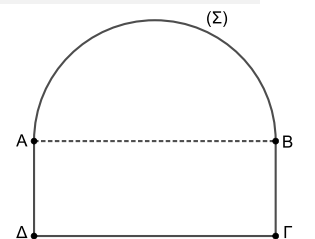
Το παρακάτω σχήμα ( $\Sigma$ ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  και το ορθογώνιο  $ABGD$ . Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται  $AB = 8 \text{ cm}$ .

(α) Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι  $E = 8\pi \text{ cm}^2$ ,

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι  $L = 4\pi \text{ cm}$ .

(β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς  $AD$  του ορθογώνιου και την περίμετρο του σχήματος ( $\Sigma$ )



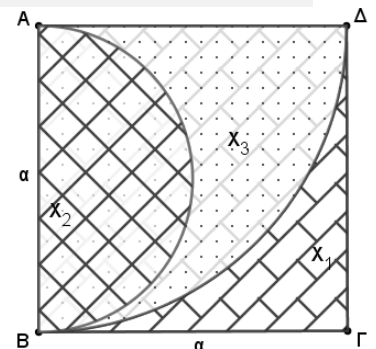
### ΘΕΜΑ 4 / 17599

Σε τετράγωνο  $ABGD$  πλευράς  $a$  του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $a$ .

(α) Αν  $X_1$  είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:  $(X_1) = \frac{a^2}{4} \cdot (4 - \pi)$

(β) Με διάμετρο  $AB$  κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν  $X_2$  είναι το χωρίο του ημικυκλίου και  $X_3$  το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων  $X_2$  και  $X_3$ .

(γ) Ποιο από τα χωρία  $X_1$  κι  $X_2$  έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



#### ΘΕΜΑ 4 / 21103

Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $2\alpha$  και με διαμέτρους τις  $B\Gamma$  και  $BA$  φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

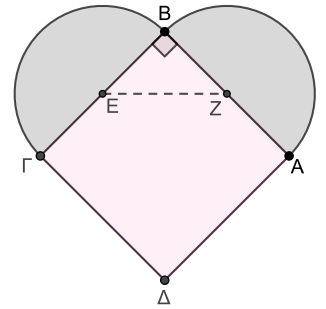
(α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με  $\pi \cdot \alpha$ .

(β)

- Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι  $2\pi+4$ , να υπολογίσετε το  $\alpha$ .
- Αν  $\alpha = 1$  να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

(γ) Αν  $(\tau)$  είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο

$\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$  με την μονάδα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



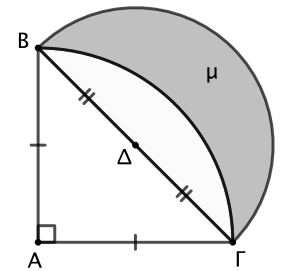
#### ΘΕΜΑ 4 / 22021

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $B\Gamma = 2\rho$ . Με διάμετρο  $B\Gamma$  γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα  $AB\Gamma$  με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να αποδείξετε ότι  $AB = \rho\sqrt{2}$ .

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου  $\mu$  ως συνάρτηση του  $\rho$ .

(γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου  $\mu$  με το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Τι συμπέρασμα προκύπτει;



#### ΘΕΜΑ 4 / 22024

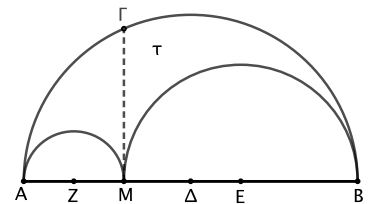
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και τυχαίο σημείο του  $M$ , τέτοιο ώστε  $AM = 2\alpha$  και  $MB = 2\beta$ . Με διαμέτρους  $AM$ ,  $MB$  και  $AB$  γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω  $\Gamma$  το σημείο τομής του ημικυκλίου  $AB$  και της κάθετης από το  $M$  στο  $AB$ .

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια  $Z\hat{A}M$ ,  $E\hat{M}B$  και  $\Delta\hat{A}B$ , όπου  $Z$ ,  $E$ ,  $\Delta$  είναι τα μέσα των  $AM$ ,  $MB$  και  $AB$  αντίστοιχα.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος  $\tau$  που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

(γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα  $\tau$  που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου  $M\Gamma$ .

(δ) Για ποια θέση του  $M$  μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος  $\tau$ ;



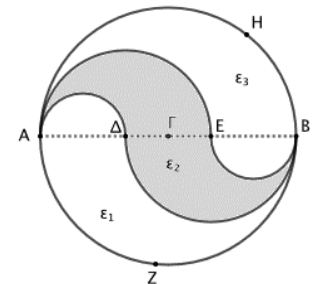
#### ΘΕΜΑ 4 / 22058

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $R$ . Έστω  $AB$  διάμετρος του κύκλου και  $\Delta$ ,  $E$  σημεία της τέτοια ώστε  $A\Delta = \Delta E = EB$ . Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια  $A\Delta$  και  $A\Delta E$  πάνω από τη διάμετρο  $AB$  και τα ημικύκλια  $BE$  και  $B\Delta$  κάτω από τη διάμετρο  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_3$  των καμπυλόγραμμων σχημάτων  $A\Delta BZ$  και  $BEAH$  αντίστοιχα.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $\epsilon_2$  του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος  $A\Delta BE$ .

(γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμο σχήματα.



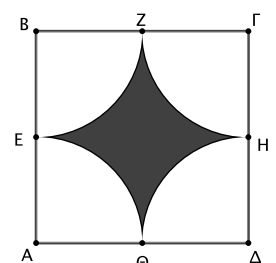
#### ΘΕΜΑ 3 / 22054

Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $2\alpha$ . Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα  $\alpha$  σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του  $\alpha$ .

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:  $E = \alpha^2(4 - \pi)$

(γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.



#### Σημαντικές αποδείξεις 2024-2025

- Θεώρημα I σελ. 44 ( $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ )
- Θεώρημα II σελ. 44 (Πυθαγόρειο)
- Θεώρημα IV σελ. 45 ( $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ )
- Θεώρημα I σελ. 81 (Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων)
- Θεώρημα III σελ. 82 (Λόγος εμβαδών σε τρίγωνα με ίσες ή παραπληρωματικές γωνίες)