

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β Λυκείου Ασκήσεις από την Τράπεζα Θεμάτων
Κεφάλαιο 3.1 Κύκλος

ΘΕΜΑ 2 / 15028

Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .
- β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.
- γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .

ΘΕΜΑ 2 / 15680

Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1,2)$ και η ευθεία

$$\varepsilon : 3x + 4y + 1 = 0$$

- α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.
- β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ 2 / 16808

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθυγράμμου τμήματος AB .
- β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) που έχει κέντρο το σημείο K και διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο Γ .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C) .

ΘΕΜΑ 2 / 18241 – 18700

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

- α) τον κύκλο C .
- β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.
- γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.
- δ) να αποδείξετε ότι το σημείο $A(3, -4)$ ανήκει στον κύκλο C .
- ε) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A .

ΘΕΜΑ 2 / 22056

Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2 + y^2 \leq 9$.

- α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy .
- β) Υπάρχει σημείο A στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\vec{OA}| = 4$, όπου O η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 4 / 15272

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

- α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3,2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.
- γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M .

ΘΕΜΑ 4 / 18567

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C .
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες.
- γ) Αν B, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A , να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου $ABO\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4 / 18569

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$.

- α) Αν A και A' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' αντίστοιχα, τότε:
 - i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και A' είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$.
 - ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° .
- β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B , να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$.
- γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία A' και B .

ΘΕΜΑ 4 / 18570

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.
- Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β
 - Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$.
 - Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.
 - Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4 / 21696

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, (1) και η ευθεία ε: $x - 2y + 3 = 0$.

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.
- Να εξετάσετε αν η ευθεία ε έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C.
- Να βρείτε τις εφαπτόμενες ε_1 , ε_2 του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε.
- Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

Κεφάλαιο 3.2 Παραβολή**ΘΕΜΑ 2 / 18242**

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

- Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C.
- Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4).
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

ΘΕΜΑ 2 / 21307

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

- Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3.
- Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α(6,3) και Β(-6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.
- Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2).

ΘΕΜΑ 4 / 22275

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

- Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της Ε και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ.
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0, 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

Κεφάλαια 3.3 Έλλειψη - 3.4 Υπερβολή**ΘΕΜΑ 2 / 20718**

Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

- Να βρείτε τις εστίες της.
- Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

ΘΕΜΑ 2 / 21647

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία Ε(4,0), Ε'(-4,0) και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

- την εξίσωση της C.
- την εκκεντρότητά της C.
- την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{9}{5})$.

ΘΕΜΑ 2 / 21651

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία Ε(5,0), Ε'(-5,0) και διέρχεται από το σημείο Α(4,0).

- Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.
- Να βρείτε την εξίσωση της C.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{5})$.