

3.3 Έλλειψη (1)

A' Ομάδας

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 - α) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10
 - β) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26
 - γ) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$
 - δ) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$
 - ε) Όταν έχει εστίες στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και $M_2\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
2. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:
 - (i) $x^2 + 4y^2 = 4$
 - (ii) $169x^2 + 144y^2 = 24336$.
3. Να εγγράψετε στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$ τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.
4. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.
5. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες μιας έλλειψης στα άκρα μιας διαμέτρου της είναι παράλληλες. (Διάμετρος μιας έλλειψης λέγεται το τμήμα που συνδέει δύο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από την αρχή των αξόνων).
6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:
 - α) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$
 - β) είναι κάθετες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$
 - γ) διέρχονται από το σημείο $M(0,4)$.
7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 100$ στα σημεία της $M_1(4\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $M_2(-4\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $M_3(-4\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ και $M_4(4\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιους τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

3.3 Έλλειψη (1)

B' Ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για όλες

τις τιμές του $t \in \mathbb{R}$

2. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$$\alpha y = \lambda \beta (\alpha + x) \quad \text{και} \quad \lambda \alpha y = \beta (\alpha - x), \quad 0 < \beta < \alpha.$$

ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

3. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, να αποδείξετε ότι

$$(ME') = \alpha + \varepsilon x \quad \text{και} \quad (ME) = \alpha - \varepsilon x.$$

4. Αν d, d' είναι οι αποστάσεις των σημείων $\Gamma(0, \gamma)$ και $\Gamma'(0, -\gamma)$ από την εφαπτομένη της

έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι

$$d^2 + d'^2 = 2\alpha^2.$$

5. Έστω $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τα σημεία $N_1(\varepsilon x_1, 0)$ και

$N_2(\varepsilon x_2, 0)$. Να αποδείξετε ότι $(M_1 N_2) = (M_2 N_1)$.

6. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της M . Έστω επιπλέον, ο κύκλος $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και

το σημείο του N , που έχει την ίδια τετμημένη με το M . Από το M φέρνουμε παράλληλη προς την ON , που τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $M\Gamma = \beta$ και $M\Delta = \alpha$.

7. Έστω ε και ε' οι εφαπτόμενες της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $0 < \beta < \alpha$ στις κορυφές της

$A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$, αντιστοίχως, και ζ η εφαπτομένη της C σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$.

Αν η ζ τέμνει τις ε και ε' στα σημεία Γ και Γ' , αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

α) $(A\Gamma)(A'\Gamma') = \beta^2$

β) ο κύκλος με διάμετρο το $\Gamma\Gamma'$ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

8. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εφαπτομένη στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Αν η εφαπτομένη

τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $\Gamma(p, 0)$ και $\Delta(0, q)$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{q^2} = 1$

3.3 Έλλειψη (1)

9. Έστω ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ και ένα σημείο του M_1 , του οποίου η ορθή προβολή στον άξονα $x'x$ είναι το σημείο M_2 . Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2 ορίζουμε ένα σημείο M , τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{(M_2M)}{(M_2M_1)} = \frac{\beta}{\alpha}$, $0 < \beta < a$. Να αποδειχτεί ότι αν το M_1 κινείται στον κύκλο, το M κινείται στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.
10. Δίνονται η έλλειψη $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = \alpha^2$. Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της C_1 και $M_2(x_2, y_2)$ το σημείο του C_2 με $x_2 = x_1$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο M_1 και η εφαπτομένη ε_2 του κύκλου C_2 στο σημείο M_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$.
11. Έστω C η έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και μεγάλο άξονα 2α . Να αποδειχτεί ότι ο λόγος των αποστάσεων οποιουδήποτε σημείου $M(x, y)$ της έλλειψης από την εστία $E(\gamma, 0)$ και την ευθεία $\delta : x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της έλλειψης. Ομοίως, για την εστία $E'(-\gamma, 0)$ και την ευθεία $\delta' : x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$.

3.3 Έλλειψη (1)

A' Ομάδας

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10

β) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26

γ) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$

δ) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$

ε) Όταν έχει εστίες στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και $M_2\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Λύση

α) Είναι $2\gamma = E'E = 8$ οπότε $\gamma = 4$ και $2\alpha = 10$, άρα $\alpha = 5$

Είναι $\beta^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ και επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη θα έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

β) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26

Λύση

Είναι $2\gamma = E'E = 10$ και $2\alpha = 26$, οπότε $\gamma = 5$ και $\alpha = 13$. Άρα $\beta^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ και επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $y'y$, η έλλειψη έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$$

γ) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$

Λύση

Είναι $\gamma = 12$, και $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{12}{13}$, οπότε $\alpha = 13$. Άρα $\beta^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, οπότε η έλλειψη θα έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

3.3 Έλλειψη (1)

δ) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$

Λύση

Είναι $\gamma = 4$, οπότε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - 16$, με $\alpha^2 > 16$. Άρα η εξίσωση της έλλειψης θα έχει τη μορφή:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - 16} = 1$$

Αφού, τώρα, το $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$ είναι σημείο της έλλειψης, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Θα έχουμε δηλαδή:

$$\frac{4^2}{\alpha^2} + \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{\alpha^2 - 16} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{16}{\alpha^2} + \frac{81}{25(\alpha^2 - 16)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$400(\alpha^2 - 16) + 81\alpha^2 = 25\alpha^2(\alpha^2 - 16) \Leftrightarrow$$

$$25\alpha^4 - 881\alpha^2 + 6400 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{881 \pm 369}{50} = \left\langle \begin{array}{l} 25 \\ 10,24 < 16 \end{array} \right. \text{ (απορρίπτεται)}$$

Άρα, η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

3.3 Έλλειψη (1)

ε) Όταν έχει εστίες στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και $M_2\left(2,\frac{1}{2}\right)$

Λύση

Αφού οι εστίες είναι πάνω στον $y'y$ η εξίσωση της έλλειψης θα είναι:

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \quad (\alpha^2 > \beta^2)$$

Τώρα, αφού τα $M_1(1,1)$ και $M_2\left(2,\frac{1}{2}\right)$ είναι τα σημεία της έλλειψης, οι συντεταγμένες τους θα

επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα, θα έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 \\ \frac{4}{\beta^2} + \frac{\frac{1}{4}}{\alpha^2} = 1 \end{cases}$$

Θέτουμε $\frac{1}{\beta^2} = \kappa$ και $\frac{1}{\alpha^2} = \lambda$ και έχουμε

$$\begin{cases} \kappa + \lambda = 1 \\ 4\kappa + \frac{1}{4}\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \kappa = 1 - \lambda \\ 4(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \kappa = 1 - \lambda \\ 16 - 16\lambda + \lambda = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \kappa = 1 - \lambda \\ 15\lambda = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \kappa = 1 - \frac{4}{5} \\ \lambda = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{1}{5} \\ \lambda = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Άρα, $\alpha^2 = \frac{5}{4}$ και $\beta^2 = 5$, οπότε η εξίσωση της έλλειψης θα είναι:

$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}y^2 = 1$$

3.3 Έλλειψη (1)

2. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

α) $x^2 + 4y^2 = 4$

β) $169x^2 + 144y^2 = 24336$

Λύση

α) Η εξίσωση $x^2 + 4y^2 = 4$ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1,$$

οπότε είναι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$. Έτσι έχουμε $\gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, οπότε $\gamma = \sqrt{3}$ και άρα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Τέλος, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-\sqrt{3}, 0)$ και $E(\sqrt{3}, 0)$.

β) Η εξίσωση $169x^2 + 144y^2 = 24336$ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\alpha = 13$, $\beta = 12$, $\gamma = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ και $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{13}$.

Οι εστίες βρίσκονται πάνω στον άξονα $y'y$ και είναι τα σημεία $E'(0, -5)$ και $E(0, 5)$

3.3 Έλλειψη (1)

3. Να εγγράψετε στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$ τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.

Λύση

Έστω $AB\Gamma\Delta$ το ζητούμενο τετράγωνο. Αν (x_1, y_1) είναι οι συντεταγμένες του σημείου A , τότε οι συντεταγμένες των σημείων B , Γ και Δ θα είναι $B(-x_1, y_1)$, $\Gamma(-x_1, -y_1)$ και $\Delta(x_1, -y_1)$ αντιστοίχως.

Επειδή $AB = A\Delta$ θα ισχύει $2x_1 = 2y_1$ οπότε θα είναι

$$y_1 = x_1 \quad (1)$$

Άρα, οι συντεταγμένες του A θα είναι (x_1, x_1) και, επειδή επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης, θα έχουμε

$$4x_1^2 + x_1^2 = 4 \Leftrightarrow$$

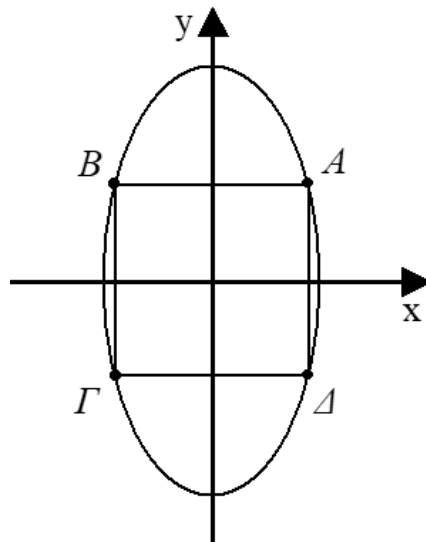
$$5x_1^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\text{αν } x_1 > 0).$$

Έτσι το ζητούμενο τετράγωνο θα έχει κορυφές:

$$A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \quad B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \quad \Gamma\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \quad \text{και} \quad \Delta\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$



3.3 Έλλειψη (1)

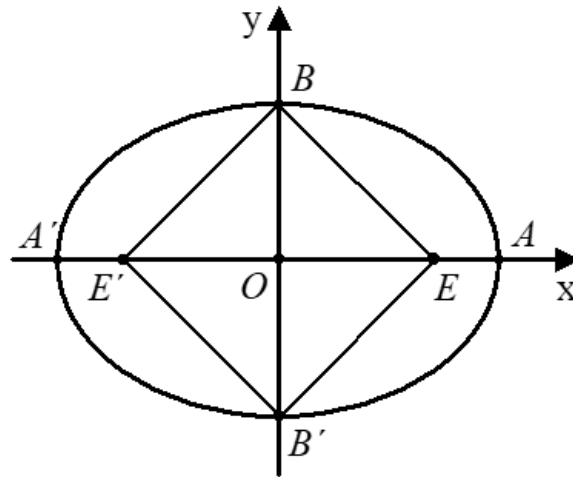
4. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.

Λύση

Η εξίσωση $x^2 + 2y^2 = 4$ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt{2}$. Επομένως, οι κορυφές B και B' έχουν συντεταγμένες $B(0, \sqrt{2})$ και $B'(0, -\sqrt{2})$ αντιστοίχως, ενώ οι εστίες E και E' έχουν συντεταγμένες $E(\sqrt{2}, 0)$ και $E'(-\sqrt{2}, 0)$ αντιστοίχως.



Οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $EBE'B$ διχοτομούνται, άρα αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

Οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $EBE'B$ είναι πάνω στους άξονες συντεταγμένων, άρα τέμνονται κάθετα.

Επίσης είναι $BB' = 2\sqrt{2}$ και $EE' = 2\sqrt{2}$, άρα οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου είναι ίσες, συνεπώς στο παραλληλόγραμμο $EBE'B$ οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες, άρα αυτό είναι τετράγωνο.

3.3 Έλλειψη (1)

αυτ. 4. Α' ομ. 6ε2. 112.

E', E (εστίες)

B', B (μικρός άξονας)

$$x^2 + 2y^2 = 4 \stackrel{:4}{\Rightarrow} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Για $x=0$, $y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

Για $y=0$, $x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

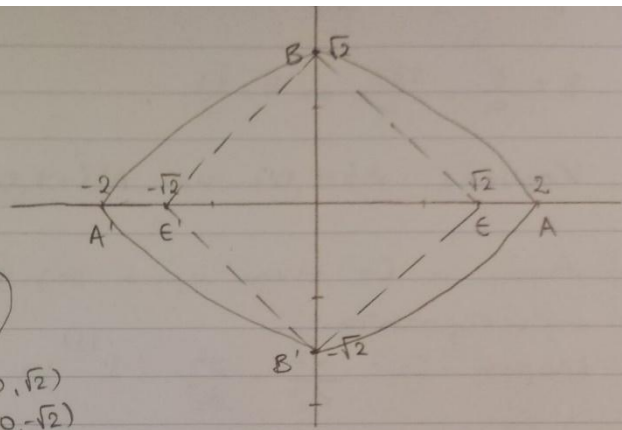
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

$$E(\sqrt{2}, 0) \quad E'(-\sqrt{2}, 0)$$

$$\begin{aligned} B(0, \sqrt{2}) \\ B'(0, -\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$A(2, 0)$$

$$A'(-2, 0)$$



- Διαγώνιοι του τετραγώνου $EBB'E'$ διχοτομούνται άρα είναι παραλληλόγραφο.
- Διαγώνιοι του $EBB'E'$ τέμνονται κάθετα, γιατί βρίσκονται πάνω στους άξονες, άρα είναι ρόμβος.
- Διαγώνιοι είναι ίσοι, $BB' = EE' = 2\sqrt{2}$, άρα αφού ισχύουν όλα τα παραπάνω κριτήρια, το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.

3.3 Έλλειψη (1)

5. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες μιας έλλειψης στα άκρα μιας διαμέτρου της είναι παράλληλες. (Διάμετρος μιας έλλειψης λέγεται το τμήμα που συνδέει δύο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από την αρχή των αξόνων).

Λύση

Αν το $M(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, τότε το αντιδιαμετρικό του θα είναι το $M'(-x_1, -y_1)$, λόγω της συμμετρίας της έλλειψης ως προς το $O(0,0)$.

Έτσι, η εφαπτομένη της έλλειψης στο $M(x_1, y_1)$ είναι η

$$\frac{x_1 x}{\alpha^2} + \frac{y_1 y}{\beta^2} = 1$$

ενώ στο $M'(-x_1, -y_1)$ είναι η

$$\frac{-x_1 x}{\alpha^2} + \frac{-y_1 y}{\beta^2} = 1$$

Οι εφαπτόμενες αυτές είναι παράλληλες, αφού οι συντελεστές διεύθυνσής τους, για $y_1 \neq 0$, είναι ίσοι.

Αν $y_1 = 0$, που ισχύει όταν τα M, M' ταυτιστούν με τα A και A' , οι εφαπτόμενες σ' αυτά είναι παράλληλες, αφού είναι κάθετες και οι δύο στον άξονα $x'x$.

3.3 Έλλειψη (1)

6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:

α) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$

β) είναι κάθετες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

γ) διέρχονται από το σημείο $M(0,4)$.

Λύση

Η εφαπτομένη ε της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $3xx_1 + yy_1 = 4$

και άρα συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{3x_1}{y_1}$. Επομένως:

α) Η εφαπτομένη ε είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -3x + 1$, αν και μόνο αν

$$\frac{-3x_1}{y_1} = -3 \Leftrightarrow$$

$$y_1 = x_1$$

Όμως το $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης. Άρα, θα έχουμε:

$$3x_1^2 + y_1^2 = 4$$

και, επειδή $y_1 = x_1$, θα ισχύει

$$3x_1^2 + x_1^2 = 4 \Leftrightarrow 4x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

Επομένως,

$$(x_1, y_1) = (1, 1) \quad \text{ή} \quad (x_1, y_1) = (-1, -1).$$

Έτσι, υπάρχουν δύο ευθείες εφαπτόμενες της έλλειψης, που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = -3x + 1$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι οι $3x + y = 4$ και $-3x - y = 4$

β) Η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$, αν και μόνο αν

$$\frac{-3x_1}{y_1} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow$$

$$y_1 = \frac{3x_1}{2}$$

Άρα, το σημείο M θα έχει συντεταγμένες $\left(x_1, \frac{3x_1}{2}\right)$ και, αφού ανήκει στην έλλειψη, θα είναι:

$$3x_1^2 + \left(\frac{3x_1}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

3.3 Έλλειψη (1)

$$3x_1^2 + \frac{9x_1^2}{4} = 4 \Leftrightarrow$$

$$21x_1^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{21}} \quad \text{ή} \quad x_1 = -\frac{4}{\sqrt{21}}$$

Επομένως

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{6}{\sqrt{21}} \right)$$

ή

$$(x_1, y_1) = \left(-\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{6}{\sqrt{21}} \right).$$

Άρα, οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι ευθείες:

$$\frac{3 \cdot 4}{\sqrt{21}}x + \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4$$

και

$$-\frac{3 \cdot 4}{\sqrt{21}}x - \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4,$$

οι οποίες γράφονται

$$6x + 3y - 2\sqrt{21} = 0$$

και

$$6x + 3y + 2\sqrt{21} = 0.$$

γ) Η εφαπτομένη ε διέρχεται από το $M(0,4)$, αν και μόνο αν η εξίσωση της ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του M . Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει $3x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 4 = 4$ ή, ισοδύναμα, $y_1 = 1$

Επειδή το $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη, θα έχουμε:

$$3x_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$3x_1^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1 \quad \text{ή} \quad x_1 = -1$$

Επομένως

$$(x_1, y_1) = (1, 1) \quad \text{ή} \quad (x_1, y_1) = (-1, 1)$$

Άρα, θα έχουμε δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το $M(0,4)$, τις ευθείες

$$3x + y = 4 \quad \text{και} \quad -3x + y = 4.$$

3.3 Έλλειψη (1)

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 100$ στα σημεία της $M_1(4\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $M_2(-4\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $M_3(-4\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ και $M_4(4\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιους τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Λύση

Οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 100$ στα σημεία M_1 , M_2 , M_3 και M_4 θα είναι, αντιστοίχως, οι:

$$4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 100 \Leftrightarrow y = -x + 5\sqrt{5}$$

$$-4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 100 \Leftrightarrow y = x + 5\sqrt{5}$$

$$-4\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y = 100 \Leftrightarrow y = -x - 5\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y = 100 \Leftrightarrow y = x - 5\sqrt{5}$$

Οι ευθείες αυτές είναι ανά δύο (πρώτη-τρίτη) και (δεύτερη-τέταρτη) παράλληλες μεταξύ τους και ανά δύο κάθετες (πρώτη-δεύτερη), (τρίτη-τέταρτη) και τέμνουν μάλιστα τον $y'y$ στα ίδια σημεία.

Έτσι το τετράπλευρο που ορίζουν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιες. Άρα το τετράπλευρο αυτό θα είναι τετράγωνο.

3.3 Έλλειψη (1)

B' Ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για όλες

τις τιμές του $t \in \mathbb{R}$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\alpha^2(1-t^2)^2}{\alpha^2(1+t^2)^2} + \frac{4\beta^2 t^2}{\beta^2(1+t^2)^2} = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

3.3 Έλλειψη (1)

2. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών

$$\alpha y = \lambda \beta(\alpha + x) \quad \text{και} \quad \lambda \alpha y = \beta(\alpha - x), \quad 0 < \beta < \alpha$$

ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Λύση

Αν $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 , τότε θα ισχύει

$$\alpha y_1 = \lambda \beta(\alpha + x_1) \quad \text{και} \quad \lambda \alpha y_1 = \beta(\alpha - x_1)$$

οπότε, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη της ισότητας, θα έχουμε

$$\lambda \alpha^2 y_1^2 = \lambda \beta^2 (\alpha^2 - x_1^2)$$

$$\alpha^2 y_1^2 = \alpha^2 \beta^2 - \beta^2 x_1^2 \quad (\text{αφού } \lambda \neq 0)$$

$$\beta^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 = \alpha^2 \beta^2$$

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$$

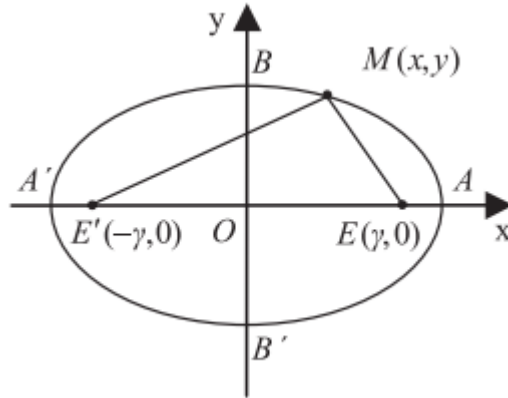
Άρα, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

3.3 Έλλειψη (1)

3. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, να αποδείξετε ότι

$$(ME') = \alpha + \varepsilon x \quad \text{και} \quad (ME) = \alpha - \varepsilon x.$$

Λύση



Αν θέσουμε $r = (ME)$ και $r' = (ME')$, τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης, θα ισχύει

$$r' + r = 2\alpha \quad (1)$$

Όμως, είναι

$$r' = \sqrt{(x + \gamma)^2 + y^2} \quad \text{και} \quad r = \sqrt{(x - \gamma)^2 + y^2}$$

Επομένως, έχουμε

$$r'^2 - r^2 = 4\gamma x$$

ή, ισοδύναμα,

$$(r' + r)(r' - r) = 4\gamma x \Leftrightarrow$$

$$2\alpha(r' - r) = 4\gamma x \Leftrightarrow$$

$$r' - r = \frac{4\gamma x}{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$r' - r = 2\frac{\gamma}{\alpha}x \Leftrightarrow$$

$$r' - r = 2\varepsilon x \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και έχουμε

$$r' = \alpha + \varepsilon x \quad \text{και} \quad r = \alpha - \varepsilon x$$

3.3 Έλλειψη (1)

4. Αν d, d' είναι οι αποστάσεις των σημείων $\Gamma(0, \gamma)$ και $\Gamma'(0, -\gamma)$ από την εφαπτομένη της

έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι

$$d^2 + d'^2 = 2\alpha^2$$

Λύση

Επειδή η έλλειψη έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \alpha \sin \varphi \quad \text{και} \quad y = \beta \eta \mu \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

οι συντεταγμένες (x_1, y_1) του M_1 θα είναι της μορφής

$$x_1 = \alpha \sin \varphi_1 \quad \text{και} \quad y_1 = \beta \eta \mu \varphi_1, \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi) \quad (1)$$

οπότε η εξίσωση $\frac{x x_1}{\alpha^2} + \frac{y y_1}{\beta^2} = 1$ της εφαπτομένης ε της έλλειψης στο σημείο M_1 θα πάρει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{x \sin \varphi_1}{\alpha} + \frac{y \eta \mu \varphi_1}{\beta} &= 1 \Leftrightarrow \\ (\beta \sin \varphi_1)x + (\alpha \eta \mu \varphi_1)y - \alpha \beta &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Έτσι, θα έχουμε

$$d = d(\Gamma, \varepsilon) = \frac{|\alpha \eta \mu \varphi_1 - \alpha \beta|}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 \varphi_1 + \alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1}} = \frac{\alpha |\eta \mu \varphi_1 - \beta|}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 \varphi_1 + \alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1}}$$

και

$$d' = d(\Gamma', \varepsilon) = \frac{|-\alpha \eta \mu \varphi_1 - \alpha \beta|}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 \varphi_1 + \alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1}} = \frac{\alpha |\eta \mu \varphi_1 + \beta|}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 \varphi_1 + \alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1}}$$

οπότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} d^2 + d'^2 &= \frac{\alpha^2 (\eta \mu \varphi_1 - \beta)^2 + \alpha^2 (\eta \mu \varphi_1 + \beta)^2}{\beta^2 \sin^2 \varphi_1 + \alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1} = \\ &= \frac{2\alpha^2 (\eta \mu^2 \varphi_1 + \beta^2)}{\beta^2 \sin^2 \varphi_1 + \alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1} = \\ &= \frac{2\alpha^2 ((\alpha^2 - \beta^2) \eta \mu^2 \varphi_1 + \beta^2)}{\beta^2 \sin^2 \varphi_1 + \alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1} = \\ &= \frac{2\alpha^2 (\alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1 + \beta^2 \sin^2 \varphi_1)}{\beta^2 \sin^2 \varphi_1 + \alpha^2 \eta \mu^2 \varphi_1} = 2\alpha^2 \end{aligned}$$

3.3 Έλλειψη (1)

5. Έστω $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τα σημεία $N_1(\varepsilon x_1, 0)$ και $N_2(\varepsilon x_2, 0)$. Να αποδείξετε ότι $(M_1 N_2) = (M_2 N_1)$.

Λύση

Είναι

$$(M_1 N_2)^2 = (x_1 - \varepsilon x_2)^2 + y_1^2 = x_1^2 + \varepsilon^2 x_2^2 - 2\varepsilon x_1 x_2 + y_1^2$$

$$(M_2 N_1)^2 = (x_2 - \varepsilon x_1)^2 + y_2^2 = x_2^2 + \varepsilon^2 x_1^2 - 2\varepsilon x_1 x_2 + y_2^2$$

Επομένως, για να δείξουμε ότι $(M_1 N_2) = (M_2 N_1)$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_1^2 + \varepsilon^2 x_2^2 - 2\varepsilon x_1 x_2 + y_1^2 = x_2^2 + \varepsilon^2 x_1^2 - 2\varepsilon x_1 x_2 + y_2^2 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x_2^2 + y_1^2 = x_2^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x_1^2 + y_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 x_1^2 + \gamma^2 x_2^2 + \alpha^2 y_1^2 = \alpha^2 x_2^2 + \gamma^2 x_1^2 + \alpha^2 y_2^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 = (\alpha^2 - \gamma^2)x_2^2 + \alpha^2 y_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2 = \beta^2 x_2^2 + \alpha^2 y_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = \frac{x_2^2}{\alpha^2} + \frac{y_2^2}{\beta^2}$$

που ισχύει, αφού τα σημεία $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$ είναι σημεία της έλλειψης.

3.3 Έλλειψη (1)

6. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της M . Έστω επιπλέον, ο κύκλος $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και το σημείο του N , που έχει την ίδια τετμημένη με το M . Από το M φέρνουμε παράλληλη προς την ON , που τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $M\Gamma = \beta$ και $M\Delta = \alpha$

Λύση

α' τρόπος) Έστω P το σημείο τομής της ON και του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα β . Είδαμε στις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, ότι το σημείο M είναι το σημείο τομής της οριζόντιας ευθείας από το P και της κατακόρυφης από το N . Επομένως, τα τετράπλευρα $MNO\Delta$ και $MPO\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε θα έχουμε

$$(M\Delta) = (ON) = \alpha \quad \text{και} \quad (M\Gamma) = (OP) = \beta$$

β' τρόπος) Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$ με τον άξονα $x'x$, τότε οι συντεταγμένες του M θα είναι $(\alpha \cos \varphi, \beta \sin \varphi)$, ενώ οι συντεταγμένες του N θα είναι $(\alpha \cos \varphi, \alpha \sin \varphi)$. Επομένως, η ευθεία $M\Delta$ θα έχει εξίσωση

$$y - \beta \sin \varphi = \frac{\alpha \sin \varphi}{\alpha \cos \varphi - \alpha \sin \varphi} (x - \alpha \cos \varphi) \quad (1)$$

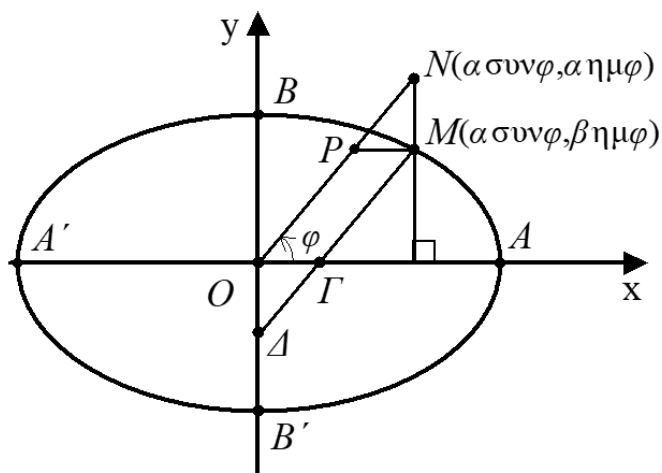
και άρα θα τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία

$$\Gamma((\alpha - \beta) \cos \varphi, 0) \quad \text{και} \quad \Delta(0, -(\alpha - \beta) \sin \varphi)$$

Επομένως

$$(M\Delta) = \sqrt{\alpha^2 \sin^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{\alpha^2 (\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \alpha$$

$$(M\Gamma) = \sqrt{\beta^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{\beta^2 (\cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \beta$$



3.3 Έλλειψη (1)

7. Έστω ε και ε' οι εφαπτόμενες της έλλειψης $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $0 < \beta < \alpha$ στις κορυφές της

$A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$, αντιστοίχως, και ζ η εφαπτομένη της C σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$.

Αν η ζ τέμνει τις ε και ε' στα σημεία Γ και Γ' , αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

α) $(A\Gamma)(A'\Gamma') = \beta^2$

β) ο κύκλος με διάμετρο το $\Gamma\Gamma'$ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

Λύση

Η ζ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$, ενώ οι ε και ε' έχουν εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = -\alpha$ αντιστοίχως.

Επομένως, οι συντεταγμένες των Γ και Γ' είναι οι λύσεις των συστημάτων

$$\begin{cases} x = \alpha \\ \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x = -\alpha \\ \frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \end{cases}$$

αντιστοίχως.

Λύνουμε τα συστήματα αυτά και βρίσκουμε ότι τα Γ και Γ' έχουν συντεταγμένες

$$\left(\alpha, \frac{\beta^2(\alpha - x_1)}{\alpha y_1} \right) \quad \text{και} \quad \left(-\alpha, \frac{\beta^2(\alpha + x_1)}{\alpha y_1} \right)$$

αντιστοίχως. Επομένως:

α)

$$(A\Gamma) = \frac{\beta^2(\alpha - x_1)}{\alpha |y_1|} \quad \text{και} \quad (A'\Gamma') = \frac{\beta^2(\alpha + x_1)}{\alpha |y_1|} \quad \text{οπότε}$$

$$(A\Gamma)(A'\Gamma') = \frac{\beta^4(\alpha^2 - x_1^2)}{\alpha^2 y_1^2} = \beta^2 \cdot \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 x_1^2}{\alpha^2 y_1^2} = \beta^2 \cdot \frac{\alpha^2 y_1^2}{\alpha^2 y_1^2} = \beta^2$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{E\Gamma} \perp \overrightarrow{E\Gamma'}$ ή, ισοδύναμα, ότι $\overrightarrow{E\Gamma} \cdot \overrightarrow{E\Gamma'} = 0$. Έχουμε λοιπόν:

$$\overrightarrow{E\Gamma} = \left(\alpha - \gamma, \frac{\beta^2(\alpha - x_1)}{\alpha y_1} \right)$$

και

$$\overrightarrow{E\Gamma'} = \left(-(\alpha + \gamma), \frac{\beta^2(\alpha + x_1)}{\alpha y_1} \right)$$

οπότε

$$\overrightarrow{E\Gamma} \cdot \overrightarrow{E\Gamma'} = (\gamma^2 - \alpha^2) + \frac{\beta^4(\alpha^2 - x_1^2)}{\alpha^2 y_1^2}$$

3.3 Έλλειψη (1)

$$= \gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2 \cdot \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 x_1^2}{\alpha^2 y_1^2}$$

$$= -\beta^2 + \beta^2 \cdot \frac{\alpha^2 y_1^2}{\alpha^2 y_1^2}$$

$$= -\beta^2 + \beta^2 = 0$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\overrightarrow{E'\Gamma} \perp \overrightarrow{E'\Gamma'}$

3.3 Έλλειψη (1)

8. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εφαπτομένη στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Αν η εφαπτομένη

τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $\Gamma(p, 0)$ και $\Delta(0, q)$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{q^2} = 1$

Λύση

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$. Άρα, τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία

$$\Gamma\left(\frac{\alpha^2}{x_1}, 0\right) \quad \text{και} \quad \Delta\left(0, \frac{\beta^2}{y_1}\right)$$

αντιστοίχως. Επομένως έχουμε $p = \frac{\alpha^2}{x_1}$ και $q = \frac{\beta^2}{y_1}$, οπότε

$$\frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{q^2} = \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^4}{x_1^2}} + \frac{\beta^2}{\frac{\beta^4}{y_1^2}} = \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1,$$

αφού το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη.

3.3 Έλλειψη (1)

9. Έστω ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ και ένα σημείο του M_1 , του οποίου η ορθή προβολή στον άξονα x' είναι το σημείο M_2 . Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2 ορίζουμε ένα σημείο M , τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{(M_2M)}{(M_2M_1)} = \frac{\beta}{\alpha}$, $0 < \beta < a$. Να αποδειχτεί ότι αν το M_1 κινείται στον

κύκλο, το M κινείται στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Απόδειξη

Έστω (x_1, y_1) οι συντεταγμένες του M_1 και (x, y) οι συντεταγμένες του M .

Επειδή $\frac{(M_2M)}{(M_2M_1)} = \frac{\beta}{\alpha}$, έχουμε $\frac{y}{y_1} = \frac{\beta}{\alpha}$, οπότε

$$y_1 = \frac{\alpha}{\beta} y \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον η M_1M_2 είναι κάθετη στον άξονα x' θα ισχύει

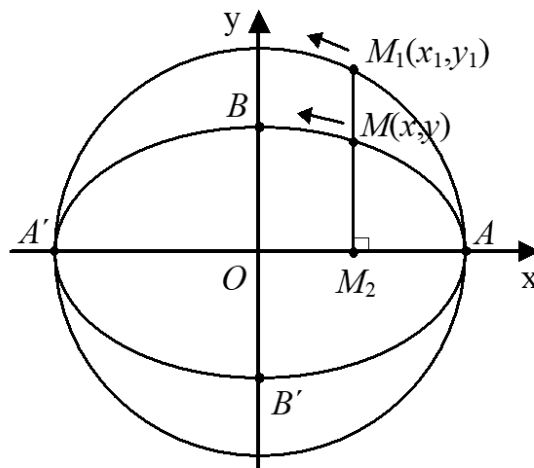
$$x_1 = x \quad (2)$$

Όμως, το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = a^2$.

Επομένως, ισχύει $x_1^2 + y_1^2 = a^2$, οπότε, λόγω των σχέσεων (1) και (2), έχουμε

$$x^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} y\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\alpha^2 y^2}{\beta^2} = a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Άρα, το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.



3.3 Έλλειψη (1)

10. Δίνονται η έλλειψη $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = \alpha^2$. Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα

σημείο της C_1 και $M_2(x_2, y_2)$ το σημείο του C_2 με $x_2 = x_1$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο M_1 και η εφαπτομένη ε_2 του κύκλου C_2 στο σημείο M_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$

Απόδειξη

Η εξίσωση της ε_1 είναι

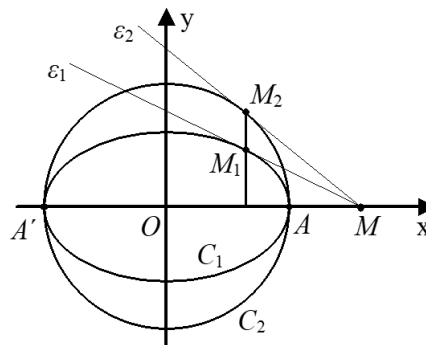
$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \quad (1)$$

και της ε_2 είναι

$$xx_1 + yy_2 = \alpha^2 \quad (2)$$

Για $y = 0$, από την (1) βρίσκουμε $x = \frac{\alpha^2}{x_1}$, ενώ από τη (2) βρίσκουμε $x = \frac{\alpha^2}{x_1}$.

Άρα, και η ε_1 και η ε_2 τέμνουν τον $x'x$ στο ίδιο σημείο, το $M\left(\frac{\alpha^2}{x_1}, 0\right)$



ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με την εφαρμογή αυτή, για να φέρουμε την εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο M_1 , φέρνουμε την εφαπτομένη ε_2 του κύκλου C_2 στο σημείο M_2 και στη συνέχεια ενώνουμε το σημείο τομής M των ε_2 και $x'x$ με το σημείο M_1 . Η MM_1 είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.

3.3 Έλλειψη (1)

11. Έστω C η έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και μεγάλο άξονα 2α . Να αποδειχτεί ότι ο λόγος των αποστάσεων οποιουδήποτε σημείου $M(x, y)$ της έλλειψης από την εστία $E(\gamma, 0)$ και την ευθεία $\delta: x = \frac{\alpha^2}{\gamma}$ είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της έλλειψης. Ομοίως, για την εστία $E'(-\gamma, 0)$ και την ευθεία $\delta': x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}$

Απόδειξη

Επειδή το $M(x, y)$ ανήκει στην έλλειψη C , θα ισχύει

$$(ME') + (ME) = 2\alpha \quad (1)$$

Επομένως, όπως είδαμε στην απόδειξη της εξίσωσης της έλλειψης, θα έχουμε

$$\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = \alpha^2 - \gamma x \quad (2)$$

Η ισότητα αυτή γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} &= \alpha - \frac{\gamma}{\alpha}x \\ \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} &= \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{\gamma} - x \right) \quad (3) \end{aligned}$$

Όμως,

$$\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = d(M, E) \quad \text{και} \quad \frac{\alpha^2}{\gamma} - x = d(M, \delta)$$

Επομένως, η (3) γράφεται

$$d(M, E) = \frac{\gamma}{\alpha} d(M, \delta)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{d(M, E)}{d(M, \delta)} = \frac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon < 1$$

