ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\overrightarrow{AB}=(-1,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-5,-2)$ οπότε

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & -2\end{vmatrix}=2+5=7\neq 0$$

Άρα τα σημεία A, B, Γ δεν είναι στην ίδια ευθεία, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β, Γ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{2-5}{-2-2}=\dfrac{3}{4}$

και εξίσωση $y-5=\dfrac{3}{4}(x-2)$ που γράφεται $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{2}$.

γ) Αν $M(x,y)$ τότε έχουμε $x=4\alpha-1$ και $y=3\alpha+1$, οπότε $\alpha=\dfrac{x+1}{4}$ και $\alpha=\dfrac{y-1}{3}$.

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3} \text{ οπότε } y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$$

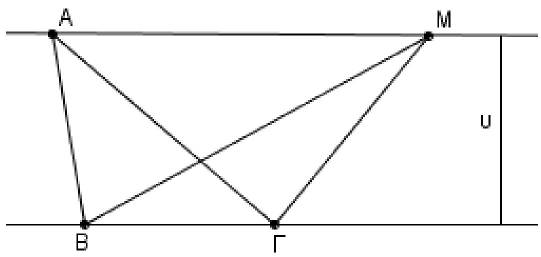
Επομένως το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}$ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επιπλέον, με $x=3$ έχουμε $y=\dfrac{9}{4}+\dfrac{7}{4}=4$, οπότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το Α.

δ) Είδαμε ότι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=7$, οπότε $(AB\Gamma)=\dfrac{7}{2}$. Επιπλέον,

$$\overrightarrow{B\Gamma}=(-4,-3) \text{ και } \overrightarrow{BM}=(4\alpha-3,\,3\alpha-4)\text{, οπότε}$$

$$\det(\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{BM})=\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4\alpha-3 & 3\alpha-4\end{vmatrix}=-12\alpha+16+12\alpha-9=7$$

που σημαίνει ότι $(MB\Gamma)=\dfrac{7}{2}=(AB\Gamma)$.



Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΜΒΓ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του Μ, αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση ΒΓ και το ύψος τους υ είναι ίσο με την απόσταση των δυο παράλληλων ευθειών του σχήματος.