



ΓΕΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ
ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 22 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A.1. Για το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ να αποδείξετε

ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 5

A.2. (α) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. ΜΟΝΑΔΕΣ 3

(β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

A.3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

(α) Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το σύνολο A , είναι 1 – 1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

(β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

(γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

(δ) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

(ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

A.4. Έστω η πρόταση:

<< Κάθε συνάρτηση η οποία είναι "1-1" είναι γνησίως μονότονη >>

(α) Να χαρακτηρίσετε την πρόταση σαν Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ).

ΜΟΝΑΔΑ 1

(β) Αιτιολογήστε την απάντησή σας

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- $(f \circ g)(x) = e^{-x-1} - x - 2, x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \alpha \cdot x + \beta, x \in \mathbb{R},$
- $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{1}{x} \right)$
- $\beta = v(1)$, όπου v συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{v(x)-1}{x-1} = 2024$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B2. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$ και ότι η f αντιστρέφεται. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης;

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B3. Να εξετάσετε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός κ ώστε να ισχύει $e^{-x} + \kappa \geq e^{-\kappa} + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

B4. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της h , με $h(x) = x^2$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B5. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x}{x} = 0$ να βρείτε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x)) + 2f(x)}{\eta\mu(\pi x)}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5



ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - g(1)x, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα, με $g^2(x) - 1 = x(2+x)$.

Γ1. Να δείξετε ότι $g(x) = x + 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ2. Να βρείτε πραγματικό λ για τον οποίο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{g^2(x) - 1} - \lambda x) \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την τιμή κ του ορίου.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ4. Δείξτε ότι το μοναδικό κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} είναι το $A(3\kappa, \kappa+2)$, όπου κ η τιμή του ορίου του Γ_2 ερωτήματος. Στη συνέχεια στο ίδιο σύστημα αξόνων να τις σχεδιάσετε δικαιολογώντας την απεικόνισή σας. ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ5. Αν B τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f και Γ η προβολή του στον άξονα των τετμημένων, βρείτε $\lim_{x \rightarrow 2} \left[(B\Gamma) \eta \mu \frac{(O\Gamma)}{(B\Gamma)} \right]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - \lambda, & x \leq 0 \\ x^2 - 2, & x > 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Αν $g(1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ με $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $|xh(x) - \sqrt{x^2 + 1}| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι το 1 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) + \ln x = 2 - x$. ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ2. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του λ ώστε η f να είναι αντιστρέψιμη

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Αν $\lambda = 3g(1)$ είναι η ελάχιστη τιμή του λ για την οποία η f είναι 1-1

Δ3. Να βρείτε την αντίστροφη της f ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ4. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\alpha^2 - 2\alpha)x} = 0$ όπου $\alpha \in \mathbb{Z}$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(-x^2 - 1) + f(|\eta \mu x| - |x|) = \alpha$, είναι αδύνατη. ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ5. Έστω M τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τετμημένη $x \in [-1, 3]$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $M_0 \in C_{f^{-1}}$ με $x_0 \in [-1, 3]$ ώστε η απόσταση OM , να γίνεται ελάχιστη.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5