

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΘΕΤ.2

ΤΕΤΑΡΤΗ 11 – 12 – 2024

Ονοματεπώνυμο.....

ΘΕΜΑ Α (10 + 5 + 10)

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε για κάθε η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$

A2. Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

(α) Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Αν συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο Δ .

(γ) Αν για μια συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$ ισχύουν $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = e$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2$.

(δ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(ε) Οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες

ΘΕΜΑ Β (5+4+6+5+5)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}

B4. Έστω η συνάρτηση $g(x) = 1 - \ln x$

(i). Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$ και να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

(ii). Αν $1 < \alpha < e - 1$ να δείξετε ότι: $\frac{1 - \ln \alpha}{1 - \ln(\alpha + 1)} > \frac{\ln \alpha}{\ln(\alpha + 1)}$

ΘΕΜΑ Γ (6+7+6+6)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $x^2 \cdot f^2(x) = \sin^2 x - 2 \sin x + 1$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και
- $f(-\pi) = \frac{2}{\pi} = -f(\pi)$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x \cdot f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$ διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $[-\pi, 0)$ και $(0, \pi]$

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-\pi, 0)$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi]$,

και στη συνέχεια ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{x} & , x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $3 \sin x_0 - x_0 = 3$

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{f(x)} + \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right)$ τέτοιο ώστε $3 \sin x_0 - x_0 = 3$

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ