

ΘΕΜΑ Α (7+4+4+10)

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$.

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής

A3. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

A4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό**, αν είναι σωστή ή με **Λάθος** αν είναι λανθασμένη:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

β) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$ τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε) Για κάθε συνάρτηση f , συνεχή στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει: αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$.

ΘΕΜΑ Β (6+6+6+7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta, x \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 = 2$ ίσο με -1 .

B1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν $\alpha = -4$ και $\beta = 3$ τότε:

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$.

B3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A,B στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

B4. Αν Γ το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων, τότε να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο ABΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{2}{1}$.

ΘΕΜΑ Γ $((2+4)+9+4+6)$

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$.

Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$.

Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t > 0$.

Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

ΘΕΜΑ Δ $((3+2)+8+(3+4)+5)$

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1 & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Δ2. Να δείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_1$, όπου x_1 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $E = \frac{-x_1^2 - 2x_1 + 2}{2}$

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2), \text{ για κάθε } x > 1.$$

Καλή Επιτυχία και στις τελικές Εξετάσεις