

ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4+e^\lambda, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3+\lambda, & x \geq 2, \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

Γ3. i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.
(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v=0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \hat{AOM}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \lambda x, & x < -1 \\ \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}, & x \geq -1 \end{cases}, \text{ όπου } \alpha > 1 \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ (μονάδες 5) και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, 0)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \alpha, & x \geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'Ox$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω (ε): $y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'Ox$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$
- $f(2) = 2$
- $f'(2) = 1$
- $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

- i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία $(\epsilon_1): y = -x + 2$ (μονάδες 3) και
- ii. εφάπτεται στην ευθεία $(\epsilon_2): y = x$ (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε $x \in (1, 2)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

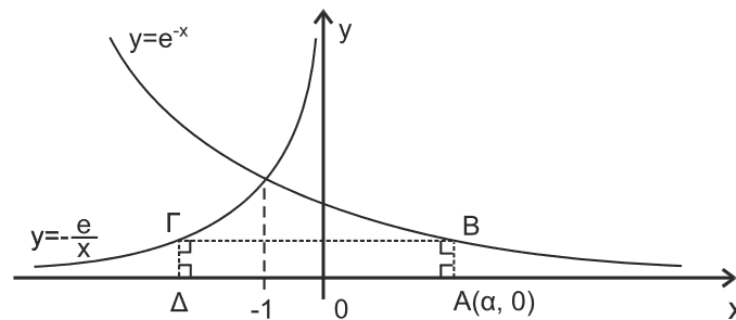
- i. $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$. (μονάδες 2)

- ii. $1 < \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 6

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΘΕΜΑ Γ



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{και} \quad g(x) = -\frac{e}{x}.$$

Το ορθογώνιο ABΓΔ έχει τις κορυφές A και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές B και Γ πάνω στις C_f και C_g , αντίστοιχα.

Έστω $A(\alpha, 0)$ με $\alpha > -1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $(-e^{1+\alpha}, e^{-\alpha})$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ABΓΔ δίνεται, ως συνάρτηση του α , από τον τύπο

$$E(\alpha) = e + \alpha \cdot e^{-\alpha}$$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τη θέση του σημείου A για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ABΓΔ μεγιστοποιείται.

Μονάδες 7

Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου A ώστε το ορθογώνιο ABΓΔ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.

Μονάδες 6

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , x > -1 \end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , x \leq -1 \\ x^3 - x & , x > -1 \end{cases}.$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 .

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ϵ) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ϵ). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου MKG , όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και G είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3, 4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1 - x^3} \right].$

Μονάδες 8

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x} = 0.$

- $f'(x)f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ (μονάδες 4).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 5).

Μονάδες 7

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha < -3$.

- Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

- Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

- (ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

- Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

- Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

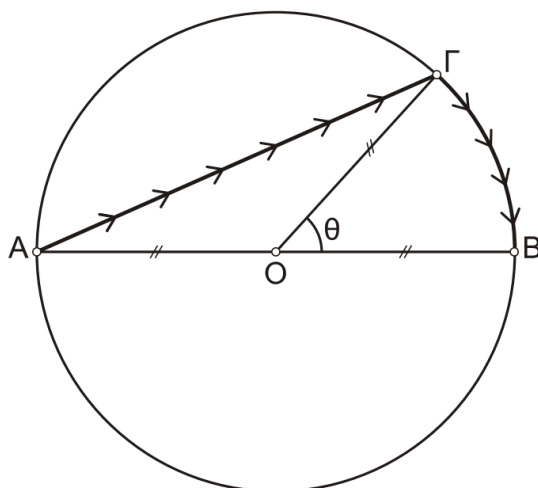
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021**ΘΕΜΑ Γ**

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο O και ακτίνα $R=1\text{km}$. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα $v_1 = 2\text{km/h}$ και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα $v_2 = 4\text{km/h}$.

Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο A του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο B .

Ο μαθητής μπορεί:

- I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο A σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $\widehat{BO\Gamma} = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓB , όπως φαίνεται στο σχήμα.
- II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο A στο σημείο B ($\theta = 0$).
- III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το A στο B ($\theta = \pi$).



- Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι

$$t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S = R \cdot \theta$.

Μονάδες 8

- Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

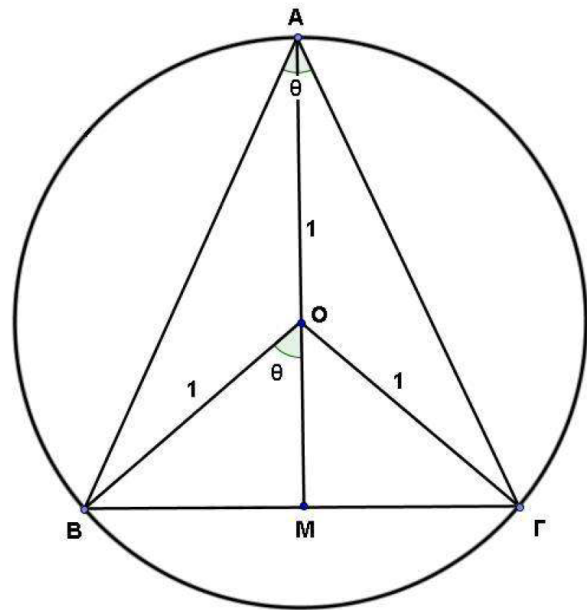
Μονάδες 9

- Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (I), (II) ή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο A στο σημείο B είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020 (ΠΑΛΑΙΟ)**ΘΕΜΑ Γ**

Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\angle BOM = \theta$, τότε:



- Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:
 $E(\theta) = (1 + \cos\theta)\eta\mu\theta$, $\theta \in (0, \pi)$.

Μονάδες 5

- Γ2.** Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2 , με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

- Γ4.** Για τις γωνίες θ_1, θ_2 , του ερωτήματος **Γ3**, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2).$$

Μονάδες 6

ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020 (ΝΕΟ)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \lambda > 0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.**Μονάδες 5****Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.**Μονάδες 6****Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .**Μονάδες 6****Γ4.** Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$.Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 .**Μονάδες 8**

ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες 8

- Γ2. Έστω $(\varepsilon): y = 3x - 2$ η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος Γ1. Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $M(0, \alpha)$ με $-2 < \alpha < 2$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = +1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 9

- Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

Μονάδες 8

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.**Μονάδες 5****Γ2.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.**Μονάδες 4****Γ3. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8**Γ4.** Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\hat{M}OK$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

Μονάδες 8

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$. Έστω το σημείο $A(\frac{3}{2}, 0)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**ΘΕΜΑ Γ**

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 .

Μονάδες 10

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = 2 \eta \mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx$.

Μονάδες 8

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 09 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A , τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1) : $y = -x$ και (ε_2) : $y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1) , (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f , και να

αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) , (ε_2) , και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$.

Μονάδες 4

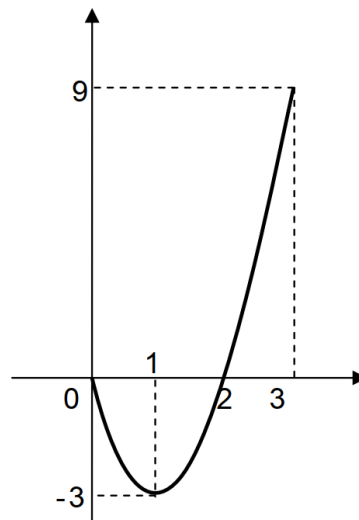
Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$.

Μονάδες 7**ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν,

τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ για το οποίο δεν

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

TETARTH 18 MAIOY 2016**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$$

όταν $x \in [0, +\infty)$.

Μονάδες 9

ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

- Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f(x - \frac{1}{6}x^3).$$

Μονάδες 9

- Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 4

- Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 f(x) g(x) dx .$$

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2024 (Β Φάση)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x - 3 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Γ1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Μονάδες 6

Γ3. (i) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = x \ln x$ και $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των C_g, C_h και την ευθεία $x = 2$

Μονάδες 5

Γ4. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει $\ln(\alpha^{2\alpha} \cdot \beta^{2\beta}) + (\alpha - 2)^2 + (\beta - 2)^2 = 2$

Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta - 5$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - 2g(x)}{x} \text{ στο } +\infty$$

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2024 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha & , x > 0 \\ x^3 + \beta x + \beta & , x \leq 0 \end{cases}$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$

Μονάδες 6

Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$, με $x < 0$, κινείται πάνω στη C_f

Να δείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_0 που το M βρίσκεται στη θέση $M_0(-1, -1)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης ως προς χρόνο t είναι τετραπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του.

Μονάδες 4

Γ3. (i) Να δείξετε ότι εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα $\rho \in (0, +\infty)$

Μονάδες 5

(ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$ που η εφαπτομένη σε αυτό να διέρχεται από το $M_0(-1, -1)$

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{f(x)} \cdot \eta\mu f(x)}{f(-x) - 2}$

Μονάδες 4

ΟΕΦΕ 2023 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = x - \frac{8x}{x^2 - 1} + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{x}} f(x) dx$ με πεδίο ορισμού

$$A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Γ1. (i) Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{x}} f(x) dx = 0$.

Μονάδες 3

(ii) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Μονάδες 3

Γ2. (i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(A)$.

Μονάδες 5

(ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε το σημείο καμπής της f και να δείξετε ότι η ευθεία $y = 9x$ διαπερνά την C_f στο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\kappa \in (0, 1)$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + (\kappa - 10)x^2 + x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 f(x) - x^3 + \kappa^2 x^2} = e^\kappa$$

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2023 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $(x-1)f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ για κάθε $x \leq 1$
- $g^2(x) = 2xg(x) + 3$ για κάθε $x \geq 1$
- η g έχει ελάχιστη τιμή το 3 στη θέση 1

Γ1. (α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 + x + 1, x \leq 1$

Μονάδες 4

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στην συνέχεια αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}, x \geq 1$

Μονάδες 6

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right)^{g(x)} + f(x)$

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(-x_0)+1}{x} + \frac{f(x+x_0)}{x-1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2022 (Β Φάση)

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon \varphi x + \alpha & , -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \ln(x+1) + 1 + \beta & , x \geq 0 \end{cases}$$

όπου α, β ακέραιοι για την οποία ισχύει το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, e-1\right]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = -1$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(x) \leq \frac{x^2 - x}{2} + \ln \lambda \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi/4}^{e-1} f(x) dx$.

Μονάδες 8

Γ4. Ένα κινητό $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \ln(x+1), x > 0 \text{ έτσι ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό } 1 / \text{sec cm}.$$

Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της C_f στο M και θ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ , τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του M είναι ίση με $\sqrt{3} - 1$ cm.

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2022 (Α Φάση)

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sin^2 x}{x^2}, & x < 0 \\ \lambda x^3 + x + \frac{3}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ με $\lambda \neq 0$

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = 4x - \frac{1}{2}$ να εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 7

➤ Για την τιμή $\lambda = 1$.

Γ3. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{x^3} \right]$

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2021 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^3 + a, & x \leq 0 \\ \frac{x - \sin x + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) < \frac{1}{2}x + 1$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f όταν $x \rightarrow +\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f , με τετμημένη $x_0 < 0$, στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

Μονάδες 7

ΟΕΦΕ 2021 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύει:

- $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^2 + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ στις οποίες την γραφική παράσταση εφάπτεται η ευθεία $y = -2x + 5$ στο σημείο $A(1, f(1))$
- $g(x) = \sqrt{x}$, για κάθε $x \geq 0$
- $h(x) = -x + 4, x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι:

(α) $f(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

(β) ορίζεται η $g \circ h$ με $(g \circ h)(x) = \sqrt{4 - x}$

Μονάδες 1

Γ2.

(α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι οι συναρτήσεις $f^{-1}, g \circ h$ είναι ίσες.

Μονάδες 5

(β) Να δείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^{-1}(x) + x) = -\infty$

Μονάδες 4

Γ3.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, 8)$

Μονάδες 3

(β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} τέμνονται σε σημείο (x_0, y_0) όπου το x_0 ανήκει στο διάστημα $(1, x_1)$, όπου x_1 η τετμημένη του σημείου επαφής της εφαπτομένης του ερωτήματος **Γ3(α)** με την C_f

Μονάδες 3

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left((x^2 - 4)^2 + x - 4 \right) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{(f(x) - f^{-1}(x))} \right) \right]$

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2020 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 2x \ln x - 3, x \in (0, +\infty)$.

Γ1. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 5

Να αποδείξετε ότι:

Γ2. α. $f(x) > 2x - 3, x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 5

β. Η εξίσωση $f(x) = 2020$ έχει μοναδική λύση.

Μονάδες 3

Γ3. Από το σημείο $A(0, -2)$ μπορούμε να φέρουμε προς τη γραφική παράσταση της f , ακριβώς μια εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

Μονάδες 5

Γ4. Υπάρχουν ακριβώς δύο παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ συναρτήσεις F , ώστε $F^2(x) = f^2(x)$.

Μονάδες 7

ΟΕΦΕ 2020 (Α Φάση)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 5}{2f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ3. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} ορίζεται και μάλιστα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η $h(x) = \left(e^{f^{-1}(x)}\right)^2 + f^{-1}(x) - x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ4. Να εξετάσετε αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 3f^{-1}(e^2)x$, εφάπτεται της C_f .

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2019 (Β Φάση)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = a^{x-1}$, $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$ η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f

Γ1. (α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή (3 μονάδες) και ότι $a = e$ (3 μονάδες)

Μονάδες 6

(β) Να δείξετε ότι η g είναι κοίλη και ότι η $y = x$ και εφάπτεται στην C_g στο $x = 0$

Μονάδες 2

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = e^{x-1} - (x+1)\ln(x+1) + x$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (-1, +\infty)$ και στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση:

$$e^{e^x} - e(e^x + 1)\ln(e^x + 1) + e^{x+1} > e^{ex} - e(ex + 1)\ln(ex + 1) + e^2 x$$

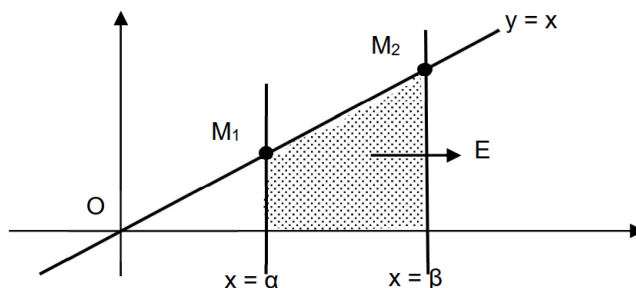
στο διάστημα $(0, +\infty)$

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \int_0^1 x f(t^2) dt = \int_0^{e-1} g(t) dt$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Μονάδες 5

Γ4. Δύο σημεία $M_1(a, a)$, $M_2(\beta, \beta)$ της ευθείας $\varepsilon: y = x$ ξεκινούν την χρονική στιγμή $t = 0$ και κινούνται σε αυτή έτσι ώστε: $\alpha'(t) = 2 \text{ cm/s}$, $\beta'(t) = 1 \text{ cm/s}$ και $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 3$ με $t \in [0, 3]$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να δείξετε $\alpha(t) = 2t$, $\beta(t) = t + 3$ και να βρεθεί η χρονική στιγμή t όπου το εμβαδόν χωρίου E που περικλείεται από την $y = x$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ μηδενίζεται καθώς και τη χρονική στιγμή που αυτό γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2019 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $A = [-5, 5]$ για την οποία ισχύουν ότι:

$$x^2 + f^2(x) = 25 \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } f(0) = 5$$

Γ1. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $A = [-5, 5]$

Μονάδες 2

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in A$

Μονάδες 7

Γ3. (i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 5]$

Μονάδες 4

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3) - f(x^2) > x^3 - x^2$ στο διάστημα $[0, 1]$

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή $f(0) = 5$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{24 + \sin^2 x} = 6 + \eta \mu^2 f(x)$ είναι αδύνατη .

Μονάδες 7

ΟΕΦΕ 2018 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - \alpha$ με $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη(ε) διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, 0)$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι η (ε) έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την C_f .

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_0 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Αν $x = x_0$ η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε :

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $e^{x_0} + 1 < e^{\alpha - x_0} < e^{\alpha} + 1$.

Μονάδες 6

Γ4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$g(e^x) \leq g(\alpha - x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο με τετμημένη $x = e^{x_0}$, όπου x_0 του ερωτήματος Γ2 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

β) Αν επί πλέον δίνεται ότι η g είναι κοίλη, να μελετήσετε τη μονοτονία της g .

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2018 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(i) $f(0) > 1$

(ii) $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} + 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ2. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + 4x = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + 2$ και $g(x) = -x^2 + 2$ έχουν μόνο μια κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2) - f(-x + 2) > 4(g(x) - x) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Γ4. Δυο σημεία με ίδια τετμημένη $A(x(t), y_1(t))$ και $B(x(t), y_2(t))$ κινούνται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα. Αν η τετμημένη τους x αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec να βρείτε τη θέση των σημείων για την οποία ισχύει: $y_1'(t) = 2y_2'(t) + 1$ με $t \geq 0$.

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2017 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = k - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$, $k \in \mathbb{R}$ για κάθε $x > 0$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ με τιμή $1 - \ln 2$.

Γ1. Να δείξετε ότι $k = 1$ και ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2) \text{ με } x > 0$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 3

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 3

ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{3x^2 - 5x + 2} > x^x$, $x > 0$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + \ln x + 2$ την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2017 (Α Φάση)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$\bullet (x-2) \cdot f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και για κάποια } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f^2(2) - 25)x^3 + f(2)x^2 - 3x + 9}{x^2 + 2x - 6} = 5$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 5}{h} = 6$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(2) = 5$ και $f'(2) = 2$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$ και $\lambda = -7$

Μονάδες 5

Γ3. (i) Για $\kappa = 3$ και $\lambda = -7$ να βρείτε το τύπο της f

Μονάδες 2

(ii) Αν $f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g με $g(x) = \ln(x+1) + 2x - 1, x \in (-1, +\infty)$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x + 1 - e^{1-2x}$ με $x \in (-1, +\infty)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα μόνο σημείο του άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2016 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 = 0, x \in \mathbb{R}.$
- $f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3},$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$
- $f(0) = \sqrt{3}.$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2e^{-x} + 1}, x \in \mathbb{R}.$

(Μονάδες 8)

Γ3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την $f^{-1}.$

(Μονάδες 5)

Γ4. Να υπολογίσετε το $\int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx.$

(Μονάδες 7)

ΟΕΦΕ 2016 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1 - \sin^2 x - x^2, \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ με } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x - x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 8

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x) + 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x} - 1, & x < 0 \end{cases}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$

Να βρείτε την παράμετρο κ , ώστε η g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\kappa = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\kappa = 2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1-1.

Μονάδες 5