

ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $|g(x) - g(y)| \leq (x - y)^2$, για κάθε $x, y \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $g(x) = f(x) \eta \mu x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

(Μονάδες 4)

- ii) ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \frac{1}{\eta \mu x}$.

(Μονάδες 1)

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{2}} = 0, \text{ με } \alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$.

Μονάδες 6

Δ4. i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$H(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $h(x) = \frac{\eta \mu x}{1 - \sin^2 x}$ στο $(0, \frac{\pi}{2}]$.
(Μονάδες 2)

- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = 2$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 6)

Μονάδες 8

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

(μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x = -\ln 2$ και $x = 0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα x' και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 7

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2, & x < 0 \end{cases}$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1, f(x_1))$ με $x_1 > 0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$, έχει εξίσωση $y = e \cdot x$.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής A , ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 8

- Δ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της, (ϵ) του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες $x = x_0$ και $x = 1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0 .

Μονάδες 6

- Δ4.** Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο B του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BO , όπου O είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f , έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

Μονάδες 6

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu x, \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $O(0,0)$.

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx$$

Μονάδες 6

ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση $f: (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2) .

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 , με $x_1 < 1 < x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2).$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e}. \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Δ2. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x) dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Μονάδες 6

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ell n x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = (\ell n x_0) \cdot (x+1) - \ell n x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ .

Μονάδες 7

ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$
και συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x^2 + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

για την οποία το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + \alpha x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $M(-1,0)$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ (μονάδες 3).

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k} + \frac{f(x)-g(x)}{x-k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(k, k+1)$.

Μονάδες 7

ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020 (ΠΑΛΑΙΟ)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x \ln x - \ln(\lambda x), \quad x \in (0, +\infty), \lambda \in (0, +\infty) \text{ και}$$

$$g(x) = x^x, \quad x \in (0, +\infty).$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f , καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$x^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 5

Για τα ερωτήματα **Δ3** και **Δ4** θεωρήστε ότι $\lambda = 1$.

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

- Δ4.** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η h είναι συνεχής**(Μονάδες 3)**

ii. Η εξίσωση

$$x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.**(Μονάδες 6)****Μονάδες 9**

ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020 (ΝΕΟ)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι
- $$f(x_0) = x_0^2 - (e + 2)x_0 + e - 1.$$

Μονάδες 7

- Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

- Δ3.** Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

Μονάδες 5

- Δ4.** Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho) (f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

Μονάδες 7

ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot \sin^3 x + f'(x) \cdot \sin^2 x \cdot \eta\mu x - 1 = 0$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,
- $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x - \epsilon\phi x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sin x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος **Δ3**.

Μονάδες 7

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 5

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$,
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\frac{1}{2}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x) dx < 1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ την εξίσωση

$$f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\epsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}) .$$

Μονάδες 9

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x) \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15}.$$

Μονάδες 9

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(e) = e \cdot \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Μονάδες 5

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 09 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

- Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

- Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g , με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$.

Μονάδες 6

- Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0. \end{cases}$

- Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

- Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

- Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

- Δ4. Να αποδείξετε ότι: $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$.

Μονάδες 7

- Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{-\pi}{2} \cdot x\right) = f\left(\frac{-\pi}{2} \cdot e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΙΟΥ 2016**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x \, dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ (μονάδες 4) και $f'(0) = 1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$.

Μονάδες 6

ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1 & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

- Δ1.** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . (μονάδες 2)

Μονάδες 5

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

Μονάδες 8

- Δ3. i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$. (μονάδες 3)

- ii)** Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

- Δ4.** Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι $(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$, για κάθε $x > 1$.

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2024 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x) + 2f(x)\sqrt{4-x} = 2(x-2)$ για κάθε $x \in [0,4]$
- ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,3]$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x) = e^{-x}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ και να βρείτε την σχετική τους θέση.

Μονάδες 7

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{-x}) \left[\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{4-f(x)} \right) \right] < 2f(x) - 4$ με $x \in (2,4)$

Μονάδες 6

Δ4. Δεδομένου ότι η f^{-1} είναι συνεχής να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f^{-1}(x-1)}{e^x f(x) - 1} = +\infty$,

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2024 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = e^{x+\kappa} \text{ και } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = -x^2 - x$$

όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι : $f(x) - g(x) \geq (\kappa + 2)x + e^\kappa$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 0$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(0, f(0))$ εφάπτεται και στην C_g

Μονάδες 6

Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει ότι : $-1 < \alpha < \beta < 0$

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) x^3 = (e^x - e)(g(\alpha) - f(\beta))$
έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(f(\alpha)) \cdot \eta \mu x}{x f(x) - x^2 - x}$

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2023 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x-1} + 1$, και

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \begin{cases} \ln x + 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1) - g(1-h)}{h}, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} + 3\kappa, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

Δ1. (α) Να αποδείξετε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1) - g(1-h)}{h} = g'(1)$

Μονάδες 2

(β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$ και ότι $g(x) = \begin{cases} \ln x + 2, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} + 3 & x \geq 1 \end{cases}$

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(1, g(1))$ και να αποδείξετε ότι εφάπτεται στην C_f .

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ώστε $g'(x_0) = f(x_0)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + x$ είναι γνησίως αύξουσα και να δείξετε ότι ισχύει $e^{g(x)-1} - 2 \geq e - g(x)$ για κάθε $x \geq 1$

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2023 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - x^2$

και η σχέση: $2f(\beta) \ln x \leq x - 1$ η οποία ισχύει για κάθε $x > 0$.

Δ1. (i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της f .

Μονάδες 4

(ii) Να δείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο $M(a, 0)$ με $a \in (-1, 0)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $f(\beta) = \frac{1}{2}$ με $a < \beta < 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x)(f(x) - 1)^2$ έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$.

Μονάδες 4

ΟΕΦΕ 2022 (Α Φάση)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(0) > 0$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 2(\sin x) \cdot f(x) = 3 + \eta \mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 7

➤ Αν $f(x) = \sin x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ τότε

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = -2\eta \mu x.$$

Μονάδες 6

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln f(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της φ τέμνει την ευθεία $y = 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιος ώστε $f^2(\xi) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$.

Μονάδες 7

ΟΕΦΕ 2022 (Β Φάση)

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - ax$ όπου $a, x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 5

Για την τιμή $a = 1$ έχουμε:

Δ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $M(1, e-1)$ και τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 6

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει δύο σημεία καμπής, έστω $A(x_1, g(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ με $x_1 < x_2$.

Μονάδες 8

Δ4. Για τη συνάρτηση g του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει:

$$(1 - x_1)g'(\xi_1) > (x_2 - 1)g'(\xi_2).$$

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2021 (Α Φάση)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

- $x^2 \cdot f^2(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x)$ για κάθε $x > 0$
- τέμνει την $y = x$ σε ένα μόνο σημείο.

Δ1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = 0$ και ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

Μονάδες 6

Δ2.

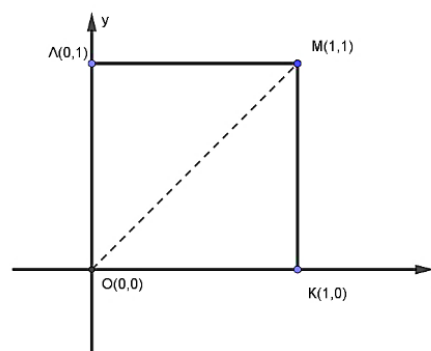
- (α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της f στο σημείο της $M(1,1)$ και τα σημεία A, B που αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

Μονάδες 3

- (β) Να δείξετε ότι το M είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και το τρίγωνο OAB έχει εμβαδόν $E = 2\tau\mu$

Μονάδες 2

- Δ3. Αν $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο $OKML$ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0), K(1,0), M(1,1)$ και $L(0,1)$ να δείξετε ότι:



- (α) η C_g τέμνει την διαγώνιο OM του τετραγώνου μόνο σε ένα σημείο

Μονάδες 6

$$(\beta) \quad g(x^3) - g(x^2) \geq x^3 - x^2 \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

Μονάδες 3

- Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^4 + 8x^3 = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = -x^2 - 1$ έχουν μια κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2021

(B Φάση)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Μονάδες 5

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|g(x) - g(y)| \leq (x - y)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η είναι σταθερή.

Μονάδες 5

Δ3. Αν $g(0) = 21$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ με $x \in (-1, +\infty)$ έχει ακριβώς μια θετική και μια αρνητική λύση (όπου g η συνάρτηση του ερωτήματος Δ2).

Μονάδες 7

Δ4. Αν $\rho_1 < 0 < \rho_2$ οι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\rho_1, \rho_2)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοιοι ώστε: $\rho_1 \cdot f'(\xi_1) = \rho_2 \cdot f'(\xi_2)$

Μονάδες 4

β. $0 \leq f(x) < 21$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

Μονάδες 4

ΟΕΦΕ 2020 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε:

$$f\left(\frac{x}{e}\right) + 1 - \frac{x}{e} \leq \ln x \leq f(x) - x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln x + x, x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση: $x \ln x < 1 - x$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(\eta \mu x) - f(x))$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα, έστω $x_0 \in (0, 1)$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(f(x)) - 2(x - 1)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1.

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2020 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) - f(x) = 2e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } f(0) = -1, f'(0) = 2.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία μόνο ρίζα.

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = (x-1)e^x + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g εκτός της προφανούς ρίζας 0, έχει μόνο μία ακόμη ρίζα.

Μονάδες 6

Δ4. Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$, από το σημείο $A(-2, g(-2))$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = g(x)$, με $x = x(t)$ και $y = y(t)$, $t \geq 0 \text{ sec}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $x'(t) = 2$ μονάδες μήκους ανά sec. Να βρείτε τη χρονική στιγμή στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι $y'(t) = -2$ μονάδες μήκους ανά sec.

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2019 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2 + 4}{x - 2} = 1$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} = 10$
- Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $M(1, -5)$, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 3$ και $g(0) \cdot g(4) < 0$

Δ1. Να δείξετε ότι **(α)** $f'(2) = 5$ **(β)** $g'(1) = 5$

Μονάδες 8

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(2, f(2))$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $B(1, g(1))$

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε τη g ως προς το πρόσημο και να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [3, 5]$ ώστε $g(x) \leq g(x_0)$ για κάθε $x \in (-\infty, 5]$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = (x-2)e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2019 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ και ισχύει :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-f(x)} & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{x \ln x}{x-1} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $2x \ln x \leq x^2 - 1$ για κάθε $x \geq 1$ και να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση g για την οποία ισχύει

$$0 \leq g(x) \leq (f(x) - 2019)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

εφάπτεται στον άξονα $x'x$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι ισχύει : $\int_0^1 \frac{4x^3 f(x^2)}{(f(x^2) + 1)^3} dx = 2f(0) - 1$

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2018 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$(f'(x) - x) \cdot e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} + \eta \mu x = 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } f(0) = 0,$$

τότε να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f για $x = 0$ παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1$

Μονάδες 8

ΟΕΦΕ 2018 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - x^2$

και η σχέση: $2f(\beta) \ln x \leq x - 1$ η οποία ισχύει για κάθε $x > 0$.

Δ1. (i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της f .

Μονάδες 4

(ii) Να δείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο $M(a, 0)$ με $a \in (1, 0)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $f(\beta) = \frac{1}{2}$ με $a < \beta < 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x)(f(x) - 1)^2$ έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2017 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού $A = (0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών $g(A) = (0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f^3(x) + xf^2(x) \leq 2\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\alpha e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} = x + \alpha$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και α κάποιος πραγματικός αριθμός
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 6

Αν $\alpha = 1$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε την αντιστροφή της.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = e$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g^{-1} έχει μια τουλάχιστον εφαπτόμενη η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ 2017 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

• $f'(1) \neq -1$ και $f(1) = 1$

• $f(f^2(x)) + f^2(x) = f(x) + x$ για κάθε $x > 0$

Να δείξετε ότι:

Δ1. η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Μονάδες 8

Δ2. για την συνάρτηση g με

$$g(x) = \begin{cases} \left(\int_1^2 f(t) dt \right) \cdot x^3, & x \geq 0 \\ \left(\int_2^3 f(t-1) dt \right) \cdot x^2, & x < 0 \end{cases}$$

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta = [-1, 1]$.

Μονάδες 8

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x^2 + 1)$, με $x > 0$. Να δείξετε ότι:

Δ3. $\int_2^3 h(x) dx > \int_1^2 h(x) dx$

Μονάδες 5

Δ4. η εξίσωση

$$\left(\int_2^3 \left(h(t) \cdot \int_2^3 h(u) du \right) dt \right) \cdot (x-2) + f(x) \left(\int_1^2 h(t) dt \right)^2 = 0$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 4

ΟΕΦΕ 2016 (Α Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2}$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και τον πραγματικό αριθμό x_0 , έτσι ώστε:

- $g(x_0) = x_0 + 1$ και
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{h} = v, v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα ρ .

Μονάδες 6

Δ2. $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x) + f'(x) - f(\rho)}{x - \rho} = e^\rho + 1$, όπου ρ η ρίζα του Δ1 ερωτήματος.

Μονάδες 4

Δ3. α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $g'(x_0) = 1$.

Μονάδες 5

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$, εφάπτεται στην C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$.

Μονάδες 5

Δ4. Η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $(f \circ g)'(x_0) = e^{x_0+1} + x_0 + 1$.

Μονάδες 5

ΟΕΦΕ 2016 (Β Φάση)**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η $g(x) = \ln x + x$, $x > 0$ για τις οποίες ισχύει $f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x$, για κάθε $x > 0$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $e^{x-x_0} = \frac{x_0}{x}$.

(Μονάδες 6)

- Δ2. i)** Έστω $0 < \alpha < 1$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τις ευθείες $y = x$, $x = \alpha$, $x = 1$ είναι $E(\alpha) = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$ τ.μ.

(Μονάδες 3)

- ii)** Η κατακόρυφη ευθεία $x = \alpha$ του προηγούμενου ερωτήματος μετατοπίζεται οριζόντια με τη θέση του αριθμού $\alpha = \alpha(t)$, $t \geq 0$ στον άξονα $x'x$ να μεταβάλλεται με ρυθμό 1 cm/sec. Αν για $t = 0$ ισχύει $0 < \alpha < x_0$, να αποδείξετε ότι την χρονική στιγμή στην οποία $\alpha = x_0$ cm/sec, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ είναι ίσος με $-x_0$ cm²/sec, όπου x_0 η τετμημένη του ερωτήματος Δ1.

(Μονάδες 5)

- Δ3.** Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(Μονάδες 5)

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ υπάρχουν $\xi_1 > 1$ και $\xi_2 > 1$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + 1$.

(Μονάδες 6)