

Μάθημα 1

Η έννοια της συνάρτησης

12/09/2024

1.1 Συναρτήσεις

1.1.1 Ορισμός:

Έστω $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το σύνολο A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y .

Το y ονομάζεται **τιμή** της f στο x ή **εικόνα** του x και γράφουμε $f(x) = y$.

Ο αριθμός $x \in A$ λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή και ο αριθμός $y = f(x)$ λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή

Συμβολικά: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ή $x \xrightarrow{f} y = f(x)$

1.1.2 Ισοδύναμοι ορισμοί:

- Η σχέση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $\Leftrightarrow$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$\text{« Αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2) \text{ »}$$

- Η σχέση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $\Leftrightarrow$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

$$\text{« Αν } f(x_1) \neq f(x_2) \text{ τότε } x_1 \neq x_2, \text{ » (νόμος αντιθετοαντιστροφής)}$$

1.1.3 Ονοματολογία:

α) Η ισότητα $y = f(x)$ λέγεται τύπος της συνάρτησης.

Συνήθως ο τύπος της συνάρτησης δίνεται. Κάποιες φορές όμως δίνεται μια σχέση που περιέχει διάφορες τιμές της f (**συναρτησιακές σχέσεις**).

Για παράδειγμα $2f(x) - 3f(x+1) = x^3, x \in \mathbb{R}, f(x) + f(y) = f(x+y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Από τις οποίες θα δούμε παρακάτω πως θα προσδιορίζουμε τον τύπο της συνάρτησης.

β) Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού της f και συνήθως συμβολίζεται με D_f ή A_f . Τα στοιχεία του ονομάζονται **πρότυπα** ή **αρχέτυπα**. Αν δεν δίνεται το πεδίο ορισμού, θα θεωρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , είναι το «ευρύτερο» υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο έχει έννοια πραγματικού αριθμού η τιμή $f(x)$

γ) Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f για κάθε $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Δηλαδή:

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} / y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

δ) Θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$, όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τις οποίες ονομάζουμε πραγματικές πραγματικής μεταβλητής. Από τον συμβολισμό αυτόν προκύπτει ότι:

$$\text{i) } A \subseteq D_f \quad \text{ii) } f(x) \in B \quad \text{iii) } f(A) \subseteq B$$

1.1.4. Παρατηρήσεις:

α) Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι καλά ορισμένη, αν γνωρίζουμε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της. Στα πλαίσια της σχολικής ύλης θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**. Δεν θα μελετήσουμε συναρτήσεις που ορίζονται και σε μεμονωμένα σημεία, όπως π.χ. η

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^2} \text{ που έχει } D_f = \{0\} \cup [1, +\infty)$$

β) Όταν θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο A , τότε εννοούμε ότι $A \subseteq D_f$

γ) «Κλαδικές» ή «Πολύ – Τιμές» ή «Πολλαπλού τύπου» συναρτήσεις

Πολλές φορές μια συνάρτηση f δίνεται με την βοήθεια άλλων συναρτήσεων όπως

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in A_1 \\ f_2(x) & , x \in A_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_k(x) & , x \in A_k \end{cases} \quad \text{όπου } A_1, A_2, \dots, A_k \text{ διαστήματα του } \mathbb{R} \text{ που δεν}$$

έχουν κανένα κοινό στοιχείο (το πολύ να είναι διαδοχικά)

$$D_f = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k.$$

Ασκηση 1.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων .

$$\alpha) f(x) = x^4 \quad \beta) f(x) = \sin x \quad \gamma) f(x) = |x| \quad \delta) f(x) = a^x$$

Άσκηση 2.

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 1 \\ x^2-5, & x \leq 0 \end{cases}$ δίνεται από τις συναρτήσεις $f_1(x) = 2x+3$

, $f_2(x) = x^2-5$ με πεδία ορισμού τα διαστήματα $A_1 = (1, +\infty)$ και $A_2 = (-\infty, 0]$

αντίστοιχα, οπότε $D_f = A_1 \cup A_2 = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

δ) Να προσέξουμε: Όταν λέμε ότι δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, δεν σημαίνει ότι $f(A) = \mathbb{R}$ αλλά $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, άρα κάθε πραγματικός αριθμός α δεν είναι υποχρεωτικά στοιχείο του συνόλου τιμών της f .

Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, δεν έχει υποχρεωτικά μια τουλάχιστον λύση στο A

Άσκηση 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta & , x \leq 0 \\ \beta \ln x + \alpha & , x \geq 1 \end{cases}$ για την οποία ισχύουν οι

σχέσεις $f(0) = 1$ και $f(1) = 4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Άσκηση 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1-x^3 & , x \leq 0 \\ x^2+x & , x > 0 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(f(-1)), f(e^x)$ και $f(\sin x - 2)$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις i) $f(e^x) = 2$ ii) $f(\sin x - 2) = 9$

Άσκηση 5.

Να εξετάσετε αν ο αριθμός **5** είναι τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 8\eta\mu x \cdot \sin x - 1 & , x < 1 \\ x^2 - x + 3 & , x \geq 1 \end{cases} \quad (2\eta\mu\alpha \cdot \sin\alpha = \eta\mu 2\alpha)$$

Άσκηση 6.

Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2 - 2x - 5$, να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ο αριθμός $\kappa^2 + 5\kappa$ είναι τιμή της f

Υπενθύμιση: Η κορυφή της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ είναι το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

1. 2. Προσδιορισμός παραμέτρου ώστε μια αντιστοιχία να είναι συνάρτηση.

1. 2. 1. Αν η παράμετρος είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f :

- α) Γράφουμε τα διαστήματα ορισμού κάθε τύπου.
- β) Θέτουμε το δεξιό άκρο μικρότερο ή ίσο του αριστερού άκρου του επόμενου διαστήματος.
- γ) Λύνουμε την ανίσωση
- δ) Ελέγχουμε τις τιμές που βρήκαμε.

Άσκηση 7.

Να βρεθούν οι τιμές του ακεραίου λ ώστε να είναι συναρτήσεις οι σχέσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , x \leq \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ x^2 + 3 & , x \geq \lambda - 2 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \ln x + 3 & , x \leq e^{\lambda^2} \\ \ln x + x + 2 & , x \geq e^{2\lambda} \end{cases}$$

1. 2. 2 Αν η παράμετρος είναι στον τύπο της συνάρτησης f

- α) Θέτουμε στους τύπους την κοινή τιμή του x .
- β) Εξισώνουμε τα αποτελέσματα και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση.

Άσκηση 8.

Να βρεθούν οι τιμές του ακεραίου λ ώστε να είναι συναρτήσεις οι σχέσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 3-x & , x \leq 4 \\ 3x^2 - \lambda^2 & , x \geq 4 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 12\lambda) & , x \leq 4 \\ 2\ln(x + \lambda - 1) & , x \geq 4 \end{cases}$$

1.3. Προσδιορισμός του πεδίου ορισμού D_f μιας συνάρτησης f .

Αν στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει:

- **Παρονομαστής $\Pi(x)$** : Θέτουμε $\Pi(x) = 0$, βρίσκουμε τις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v$ και γράφουμε $D_f = \mathbb{R} - \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v\}$, αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός
- **Υπόρριζο $A(x)$** : Θέτουμε $A(x) \geq 0$, λύνουμε την ανίσωση. Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το πεδίο ορισμού της f , αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός
- **Λογάριθμο του $A(x)$** : Θέτουμε $A(x) > 0$, λύνουμε την ανίσωση. Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το πεδίο ορισμού της f αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός
- **Παράσταση της μορφής $A(x)^{B(x)}$** : Θέτουμε $A(x) > 0$, λύνουμε την ανίσωση. Οι λύσεις της ανίσωσης και οι περιορισμοί που προκύπτουν από τον εκθέτη $B(x)$ είναι το πεδίο ορισμού της f .
- **Συνδυασμός** των προηγούμενων περιπτώσεων.
- **Δύναμη**: για μια δύναμη a^x ισχύουν τα εξής:
 - i) αν $a > 0$ τότε ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - ii) αν $a = 0$ τότε ορίζεται για κάθε $x > 0$

Άσκηση 9. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

$$\alpha) f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 2}$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{4^x - 6 \cdot 2^x + 8}$$

$$\delta) f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$$

$$\epsilon) f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \left(\frac{x-1}{\ln x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Άσκηση 10. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-6}$

β) $f(x) = \frac{2x+1}{||x|-4|-2}$

γ) $f(x) = \frac{2x^2+1}{8x^3+27}$

δ) $f(x) = \sqrt{2\eta\mu x - 1}$

ε) $f(x) = \sqrt{5-|x^2-4|}$

στ) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^{-x}}$

Ασκηση 11. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = \frac{\sqrt{8+2x-x^2}}{(x-2)^2-(x-1)^2}$

β) $f(x) = \sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2+x-x^2}}$

γ) $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{x}}$

δ) $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{1-\ln x}}$

ε) $f(x) = \frac{\ln(1-\ln x)}{2\sigma\upsilon\nu x - 1}$

στ) $f(x) = \sqrt{x^2-3|x|+2}$

ζ) $f(x) = (x-1)^{-\frac{2}{3}} + (x^2-1)^\pi + (3-x)^{-\sqrt{2}}$

η) $f(x) = (16-x^4)^{\sqrt{x}}$

Ασκηση 12.

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{|x|-x} \cdot (x^2+x-2)}$

β) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \ln(16-x^4)$

γ) $f(x) = \frac{2x^2+1}{\eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x}$

δ) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Ασκηση 13.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε ο παρακάτω συναρτήσεις να έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

α) $f(x) = \sqrt{x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - 1}$

β) $f(x) = \frac{e^x + x}{x^2 + 2x + \alpha(2\alpha^2 - 1)}$

γ) $f(x) = \sqrt{(\alpha-1)x^2 + (\alpha-1)x + 2}$

δ) $f(x) = \ln(\alpha x^2 + (\alpha+1)x + 2\alpha - 1)$

Υπενθύμιση:

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

