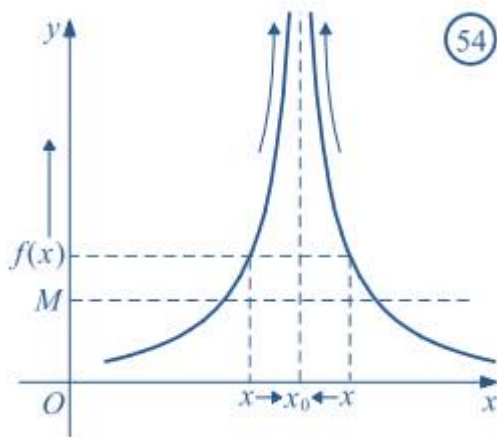


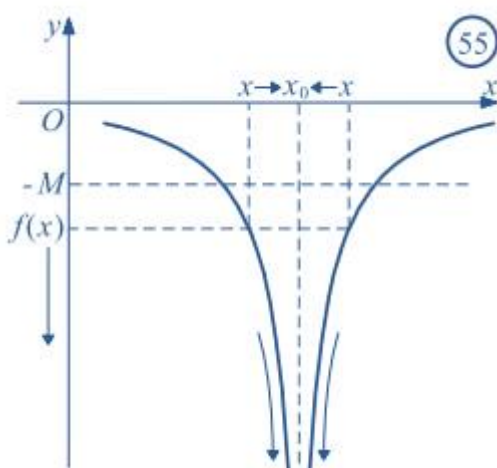
Μάθημα 11 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ **22/10/2024****11.1 Ορισμοί**

α) Θα λέμε ότι « το όριο της f στο x_0 είναι το $+\infty$ » και συμβολίζουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ καθώς το x πλησιάζει το x_0 με οποιοδήποτε τρόπο, οι τιμές της f αυξάνονται απερίορστα.



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

β) Θα λέμε ότι « το όριο της f στο x_0 είναι το $-\infty$ » και συμβολίζουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ καθώς το x πλησιάζει το x_0 με οποιοδήποτε τρόπο, οι τιμές της f μειώνονται απερίορστα.



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

11.2 Σημείωση:

Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

11.3 Ιδιότητες ορίων

$$1) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$2) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$3) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$$

$$4) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$$

$$5) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0, \text{ δηλαδή } \frac{\alpha}{\pm\infty} = 0$$

$$6) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$7) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

$$8) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

$$9) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

$$10) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$$

$$11) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \begin{cases} +\infty & , v \text{ άρτιος} \\ -\infty & , v \text{ περιττός} \end{cases}$$

11.4 Βασικά όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{και γενικά} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$$

$$\beta) \text{ Το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ δεν υπάρχει, αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{Ομοίως δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ για την συνάρτηση } f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}$$

$$\gamma) \text{ Για τα όρια της μορφής } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{2v}}, v \in \mathbb{N}^* \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{2v+1}}, v \in \mathbb{N} \text{ θέτουμε}$$

$$x - x_0 = u \text{ άρα για } x \rightarrow x_0 \text{ το } u \rightarrow 0 \text{ και αναγόμεστε σε όρια των μορφών } (\alpha), (\beta)$$

11.5 Βασική πρόταση (Κριτήριο παρεμβολής στα άπειρα όρια)

Αν $f(x) \leq g(x)$ «κοντά» στο x_0 τότε:

$$\alpha) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

$$\beta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Απόδειξη:

$$\alpha) \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ έχουμε } f(x) > 0, \text{ «κοντά» στο } x_0 \text{ οπότε και } g(x) > 0, \text{ «κοντά» στο } x_0, \text{ λόγω της σχέσης } f(x) \leq g(x), \text{ άρα, } 0 < \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{f(x)}, \text{ «κοντά» στο } x_0.$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0, \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0, \text{ με}$$

$$g(x) > 0 \text{ «κοντά» στο } x_0, \text{ συνεπώς } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

β) Ομοίως

Σχόλιο: Για τις ασκήσεις η πρόταση αυτή θα χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη

11.6. Όριο Αθροίσματος

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
Το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$;$	$;$

11.7. Όριο Γινομένου

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$										
Το όριο της f είναι:	$\alpha > 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$;$	$;$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Παρατηρήσεις:

Επειδή $f - g = f + (-g)$ και $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, ο υπολογισμός των ορίων της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων ανάγονται στα παραπάνω θεωρήματα.

11.8 Απροσδιόριστες μορφές:

$$\frac{0}{0}, (+\infty) - (+\infty), (-\infty) + (+\infty), (+\infty) + (-\infty), 0 \cdot (\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 1. Όρια κλασματικών συναρτήσεων $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, που είναι ή ανάγονται στην μορφή $\frac{\ell}{0}, \ell \neq 0$.

- 1) Γράφουμε την συνάρτηση στη μορφή $f(x) = \frac{1}{\text{"ΚΑΚΟΣ"}} \cdot (\text{Υπόλοιπο})$, όπου "ΚΑΚΟΣ" είναι ο παράγοντας ή ο όρος που μηδενίζει τον παρονομαστή.
- 2) Βρίσκω το όριο $\ell \neq 0$ του «υπολοίπου»
- 3) Βρίσκω το πρόσημο του "ΚΑΚΟΥ" «κοντά στο x_0 » και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
 - α) Αν "ΚΑΚΟΣ" > 0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = (+\infty) \cdot \ell$
 - β) Αν "ΚΑΚΟΣ" < 0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = (-\infty) \cdot \ell$
 - γ) Αν "ΚΑΚΟΣ" αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 τότε παίρνουμε πλευρικά όρια τα οποία είναι συνήθως διαφορετικά, άρα όριο δεν υπάρχει.

Άσκηση 226. Να βρείτε τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2 - 2|x - 2|}{x^2 - 4x + 4}$$

Άσκηση 227. Να βρείτε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν)

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{|x - 1|}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x \cdot \eta\mu x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{|x| - \eta\mu x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x + 1}{\sigma\upsilon\nu x + 1}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + 1}{4x^2 + 5\sqrt{x}}$$

Άσκηση 228. Να βρείτε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν)

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^-} \sigma\phi x$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sigma\phi x$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \epsilon\phi x$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - 1}{\epsilon\phi x}$$

Άσκηση 229. Να βρείτε τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu^3 x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^4} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x}+1}$$

Άσκηση 230. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x^2 - 25} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-3}{1 - \eta\mu x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{|x-1|} \quad \varepsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x|x|} \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-3x+2) \cdot \eta\mu(x-1)}{(x^3-3x^2+3x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2}}$$

Άσκηση 231. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\eta\mu x}{x} < 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x} = +\infty \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1 + \sigma\upsilon\nu x}{x - \eta\mu x}$$

Άσκηση 232. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu x}{x^3 - x \cdot \eta\mu^2 x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{\ln x + x - 1}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2. (ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

Δίνεται το όριο μιας παράστασης $A(x)$ στο x_0 που περιέχει τη συνάρτηση f και ζητείται το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ή ζητείται το όριο μιας άλλης παράστασης $B(x)$ που περιέχει τη συνάρτηση f

α) Θέτουμε $g(x) = A(x)$ κοντά στο x_0 και λύνουμε ως προς f

β) Υπολογίζουμε το όριο της συνάρτησης f με τις μεθόδους που αναφέραμε στα προηγούμενα

γ) Αν ζητείται το $\lim_{x \rightarrow x_0} B(x)$ αντικαθιστούμε την f , όπως την βρήκαμε στο (α)

Άσκηση 233. α) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \cdot f(x) = +\infty$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \cdot f(x) = \ell > 0$, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 4f(x) + 1}{f(x)}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4f(x) + 1}{3f(x) - 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 4f(x) + 1}{f^3(x) - 2}$

v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu f(x) - 3\sigma\upsilon\nu f(x)}{f^2(x) + 2}$

Άσκηση 234. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x+3}-2} = +\infty$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Άσκηση 235 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+3}{f(x)-2} = +\infty$ με $f(x) \neq 2$ «κοντά» στο $x_0 = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Άσκηση 236 Έστω συνάρτηση $f: 0, +\infty \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$(f(x))^3 + f(x) = x \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $0 < f(x) < x$ για κάθε $x > 0$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

δ) αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι ίσο με $+\infty$

Άσκηση 237 Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 - 2x)g(x)] = 6 \quad \text{να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ β) δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = 3$

Άσκηση 238 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{f(x)-2} = +\infty$$

Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(f(x)-2)}{f^2(x)-4} \qquad \gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{f^2(x)-4f(x)+4}$$

Άσκηση 239 Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ όταν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x-2)}{\sqrt{x^2+5}-3}$

Άσκηση 240 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

β) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(f(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right) \right)$

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1)=0$ και f γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)}$$

Άσκηση 241

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ στο $\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(2)=0$ να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|f(x)|}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)f(x)}$

Άσκηση 242 Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} - 1 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x^2+1)f(x) + xg(x)] = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) + g(x)] = -1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 3. (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ)

Αν $f(x) \leq g(x)$ «κοντά» στο x_0 τότε:

$$\alpha) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

$$\beta) \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Άσκηση 243. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) \geq \frac{1}{x}, x > 0$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Άσκηση 244. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x)}{f^3(x) + 2f(x)} = 0$

Άσκηση 245. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, να

δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$

Άσκηση 246 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, να δεί-

ξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^4(x) + g^4(x)} = +\infty$

ΜΕΘΟΔΟΣ 4. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

A. Ζητείται να βρούμε την τιμή ή τιμές παραμέτρων ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (ή να είναι πραγματικός αριθμός)

• Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ «κοντά» στο x_0 με $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ οπότε $f(x) = h(x) \cdot g(x)$

α) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [h(x) \cdot g(x)]$ υπολογίζουμε τα όρια και προκύπτει μία σχέση

(1) από την οποία βρίσκουμε την τιμή της παραμέτρου.

β) Αν έχουμε παραπάνω από μία παράμετρο, τότε λύνουμε την προηγούμενη σχέση ως προς τη μία παράμετρο σχέση (2), αντικαθιστούμε στην $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ από την οποία προκύπτει άλλη μία σχέση (3).

γ) Λύνουμε το σύστημα των (2),(3).

δ) Επαληθεύουμε αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ για τις τιμές που βρήκαμε.

B. Ζητείται να βρούμε ένα όριο της μορφής $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ το οποίο μας οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{h(\lambda)}{0}$ για τις διάφορες τιμές μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Γράφουμε $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \sigma(x)$ με $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = h(\lambda)$

• Σχηματίζουμε πίνακα πρόσημων για το $h(\lambda)$.

α) Αν ο παρονομαστής $\varphi(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο «κοντά» στο x_0 τότε βρίσκουμε το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων για το $h(\lambda)$

β) Αν ο παρονομαστής $\varphi(x)$ **αλλάζει πρόσημο** «κοντά» στο x_0 τότε παίρνουμε πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}, \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, τα οποία τα υπολογίζουμε σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων για το $h(\lambda)$

Άσκηση 247 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ αν:

$$\alpha) f(x) = \frac{2x^2 - \lambda x - \lambda^2}{|x-1|} \quad \beta) f(x) = \frac{\sqrt{x} - \lambda}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \quad \gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \beta x + 1}{|x-1|} & , x < 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση 248 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^2 + \beta + 1}{x^2 - 2x + 1}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο αυτό.

Άσκηση 249 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha \in \mathbb{R}$ αν:

$$\alpha) f(x) = \frac{x + \alpha}{x^2 - 4x + 4} \quad \beta) f(x) = \frac{x^4 + \alpha x + \beta}{x - 2} \quad \gamma) f(x) = \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{|x - 2|}$$

Άσκηση 250 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \frac{\alpha x^3 - x - 2}{x^2 - 1}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 251 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.