

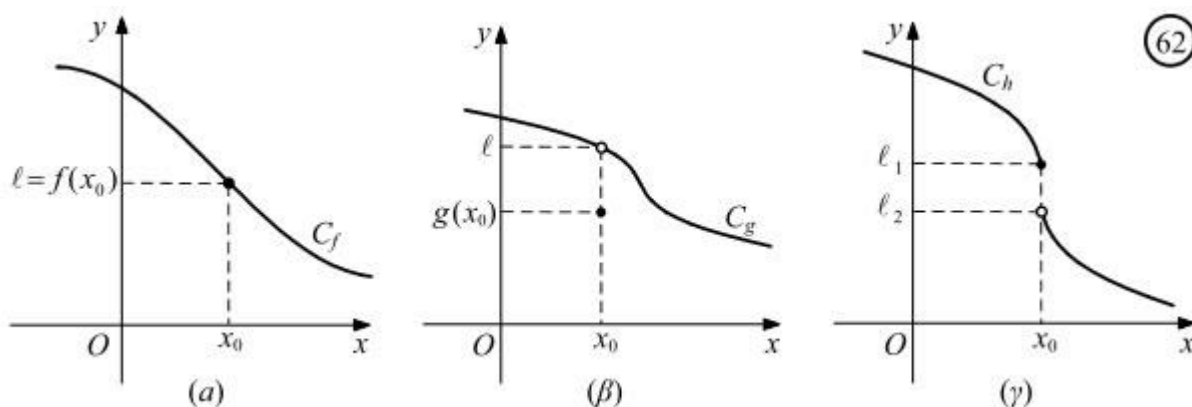
Μάθημα 13

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

12/11/2024

13.1 Ορισμοί

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα αντίστοιχα.



Παρατηρούμε ότι :

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq g(x_0)$

Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις προηγούμενες συναρτήσεις μόνο η f δεν διακόπτεται στο x_0 και έτσι έχουμε τον ορισμό:

13.1.1 Ορισμός 1.

Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν, ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (1)

Ισοδύναμοι ορισμοί:

$$1. \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

$$2. \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h) = f(x_0)$$

$$3. \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = f(x_0) \text{ με } x_0 \neq 0$$

$$4. \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \kappa \cdot h) = f(x_0), \kappa \neq 0$$

13.1.2 Ορισμός 2. Μια συνάρτηση f ονομάζεται συνεχής, στο πεδίο ορισμού της, αν και μόνο αν, είναι συνεχής σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Σχόλια : Μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν:

α) Δεν υπάρχει το όριο της στο x_0

β) Υπάρχει το όριο της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

γ) Ένα από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι το $+\infty$ ή $-\infty$.

13.3 Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- Οι συναρτήσεις $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $\varepsilon\varphi x$ είναι συνεχής στο σύνολο $A = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$
- Η συνάρτηση $\sigma\varphi x$ είναι συνεχής στο σύνολο $A = \mathbb{R} - \{x / \eta\mu x = 0\}$
- Οι συναρτήσεις, $f(x) = e^x, g(x) = a^x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.
- Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x, g(x) = \log_a x$ είναι συνεχείς στο $(0, +\infty)$
-

13.4 Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους, τότε

και οι συναρτήσεις: $f \pm g, f \cdot g, \lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$), $|f|$, $\sqrt[k]{f}$ ($f(x) \geq 0$), $\kappa \in \mathbb{N}$, με $\kappa \geq 2$

είναι συνεχής στο x_0 (αν αυτό ανήκει στο πεδίο ορισμού τους).

Σχόλια:

1) Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

2). Η πρόταση ισχύει και όταν οι f και g είναι συνεχείς σε ένα σύνολο A

3). Οι πράξεις συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις.

13.5 Συνέχεια και σύνθεση

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Σχόλιο: Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παραδείγματα.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι συνεχής σε κανένα $x_0 \in \mathbb{R}$, αλλά η

$g(x) = x^2 - x$ και η $g(f(x)) = 0$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού τους.

2. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & , x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$, ενώ η

$(f \circ f)(x) = x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13.6 Σημαντικές παρατηρήσεις

1. Αν δίνεται ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι συνεχής στο x_0 , τότε συμπεραίνουμε τα εξής:

- Το $x_0 \in A$
- Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και οι $\kappa \cdot f \pm \lambda \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0 με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

3. Αν το $x_0 \notin A$, τότε δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν η f είναι ή όχι συνεχής στο x_0 .

4. Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, αν ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια στο x_0 απειρίζεται θετικά ή αρνητικά.

5. Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής, εννοούμε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

6. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της τότε είναι συνεχής και σε κάθε υποσύνολο του.

7. Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε είναι συνεχής και στο $-x_0 \in A$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή άρα για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$ και για κάθε $x \in A$ είναι $f(-x) = -f(x)$

Η είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = f(-x_0)$

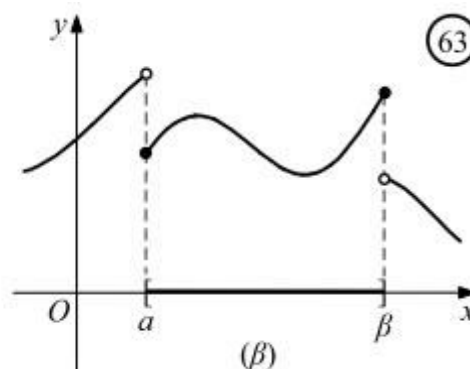
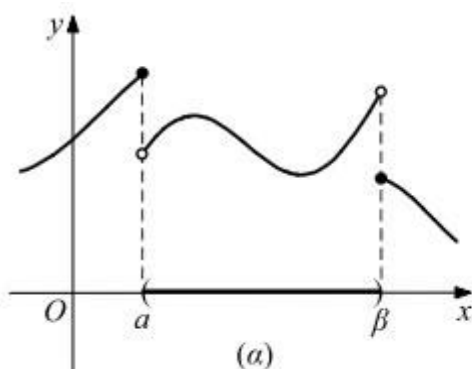
$$\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -x_0} [-f(-x)] = - \lim_{x \rightarrow -x_0} f(-x) \stackrel{(-x=y)}{=} - \lim_{y \rightarrow x_0} f(y) \stackrel{(y=x)}{=} - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -f(x_0) = f(-x_0)$$

13.7. Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα

Ορισμός 1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (α, β) .

Ορισμός 2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και ισχύουν ακόμα:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$



Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$

Στο σχήμα (α) η f είναι συνεχής στο (α, β) και στο σχήμα (β) η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

Προσοχή!!! Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, δεν σημαίνει ότι είναι συνεχής και στα σημεία α και β . Δες σχήμα (β)

Βασικές Μέθοδοι – Κατηγορίες Ασκήσεων

Κατηγορία Α.

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να μελετηθεί μια συνάρτηση ως προς τη συνέχεια:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της.
- Βρίσκουμε τα σημεία x_0 στα οποία θα εξετάσουμε τη συνέχεια με τον ορισμό.

Τέτοια είναι τα σημεία **αλλαγής τύπου**, και τα σημεία στα οποία η συνάρτηση παίρνει μια **συγκεκριμένη τιμή**.

Εξετάζουμε αν: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- Στο υπόλοιπο του πεδίου ορισμού εξηγούμε για ποιο λόγο είναι συνεχής.

(πράξη συνεχών, σύνθεση συνεχών κ.λ.π.)

Σχόλια: Αν ζητείται να βρεθούν τιμές παραμέτρων ώστε μια συνάρτηση f να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε

απαιτούμε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

λύνουμε το αντίστοιχο σύστημα και βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων.

Άσκηση 273. Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια στο x_0 οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \eta\mu 2x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \qquad \beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & , x < 1 \\ 3x + \ln x & , x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x^2} & , x < 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0, \quad x_0 = 0 \\ \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{x} & , x > 0 \end{cases} \quad \delta) f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

Άσκηση 274. Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^\kappa \eta\mu \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad (\kappa \in \mathbb{N}^*) \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} & , x > 1 \\ x^2 + 2x & , x \leq 1 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} & , 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \delta) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x e^{\frac{x-1}{x}} & , x > 0 \end{cases}$$

Άσκηση 275. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} (x - \alpha)(x + \alpha) & , x \leq 2 \\ \alpha x + 5 & , x > 2 \end{cases} \quad \beta) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|} & , x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{x^v - 1}{x^{2v+1} - 1} & , x \neq 1 \\ \alpha & , x = 1 \end{cases} \quad (\nu \in \mathbb{N}^*) \quad \delta) g(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}} & , 0 < x \neq 1 \\ \alpha & , x = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 276. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + (\beta - 1)x + 6}{x - 3} & , x \neq 3 \\ 7 & , x = 3 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να

βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Άσκηση 277. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta & , x < 2 \\ \alpha & , x = 2 \\ \frac{x}{x+1} & , x > 2 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x + \alpha}{x-1} & , x < 1 \\ \beta x + 2\alpha - 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} \alpha \sin(\pi x) & , x \leq -1 \\ \beta x - e^{1-x^2} & , -1 < x < 1 \\ \alpha x^2 - 6x + \alpha^2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$\delta) f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - \alpha}{x^3 - 1} & , x < 1 \\ \frac{4}{3} & , x = 1 \\ \frac{\eta\mu(\pi x)}{\beta(x-1)} & , x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση 275. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $f^2(x) - 2f(x) + g^2(x) + 1 \leq \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ (1) δείξτε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $\xi = \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 276. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία είναι $f^3(x) + 3f(x) = x, x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \xi \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}

Άσκηση 277. Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 συνεχής με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(0)$

και

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} f(x) & , x > 1 \\ f(x-1)-1 & , x \leq 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) ο αριθμός 1 δεν ανήκει στο σύνολο A
- β) η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι συνεχής.

Άσκηση 278. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

- α) η συνάρτηση f είναι 1-1
- β) η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

Άσκηση 279. Έστω η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, 1)$

Να αποδείξετε ότι:

- α) η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής

β) η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Κατηγορία Β. Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ή ο τύπος ή η τιμή

$f(x_0)$ μιας συνεχούς συνάρτησης f στο x_0 , αν γνωρίζουμε το όριο μιας παράστασης που περιέχει την f , όταν $x \rightarrow x_0$.

Τότε:

α. Θέτουμε την παράσταση αυτή ίση με μια συνάρτηση g , και λύνουμε ως προς f .

β. Αφού f συνεχής στο x_0 , θα είναι $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Σχόλιο:

1. Αν δίνεται κάποια ανισοτική σχέση, τότε παίρνουμε πλευρικά όρια και καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \geq \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \leq \alpha, \quad \text{οπότε} \quad f(x_0) = \alpha.$$

2. Προσπαθούμε να «φράξουμε» την συνάρτηση f από μία μηδενική συνάρτηση

Άσκηση 280 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x-1)f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Να βρείτε την τιμή $f(1)$ και τον τύπο της συνάρτησης

Άσκηση 281 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x) + \sin \frac{\pi x}{4}}{x-2} = 3. \quad \text{Να βρείτε την τιμή } f(2)$$

Άσκηση 282 Δίνεται ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = \alpha$ και ισχύει:

$$f(x) \cdot (x - \alpha) \geq x^2 + \alpha x - 2\alpha^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1) \quad \text{Να δείξετε ότι } f(\alpha) = 3\alpha.$$

Άσκηση 283 Αν η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = -2$

να βρείτε το $f(1)$

Άσκηση 284 Να βρεθεί η τιμή $f(0)$, αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \eta\mu^2 2x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{\sqrt{1+x^2} - 1} = 2$$

Άσκηση 285 Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2 + f(x)(x^5 - 1) = \sqrt{2x^2 + 2}, x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 286 Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $2f(x) = x + \eta\mu f(x), x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: α) $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Άσκηση 287 Αν μία περιττή συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$ και

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + x^2 - x - 2}{x - 3} = 5, \text{ τότε:}$$

α) Να υπολογίσετε το $f(3)$

β) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_1 = -3$

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{|x - 3|}$

Άσκηση 288 Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x+1)| \leq x^2, \text{ τότε:}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$

γ) δείξτε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h) - f^2(1)}{h} = 0$

Κατηγορία Γ.

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f , είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για την οποία γνωρίζουμε:

• Ότι ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση.

• Είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 = \alpha$ του πεδίου ορισμού της.

α) Πρέπει να δείξουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 \in \Delta$.

β) Γνωρίζουμε το $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ (1)

γ) Θα αντικαταστήσουμε στην (1) τη μεταβλητή x , με μια συνάρτηση $g(h)$, μη σταθερή, η οποία θα έχει τις ιδιότητες:

i) Θα είναι $\lim_{h \rightarrow \alpha} g(h) = x_0$.

ii) Ο τύπος της θα επαληθεύει την συναρτησιακή σχέση.

Συνηθισμένες περιπτώσεις:

α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, θέτουμε όπου $x = x_0 + h$, επιλέγουμε $g(h) = x_0 + h$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θέτουμε όπου $x = x_0 \cdot h$, επιλέγουμε $g(h) = x_0 + h$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = \alpha$, τότε:

i) Θέτουμε όπου $x = (x_0 - \alpha) + h$ δηλαδή $g(h) = x_0 - \alpha + h$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f[(x_0 - \alpha) + h]$$

ii) Θέτουμε όπου $x = \left(\frac{x_0}{\alpha}\right) \cdot h$ δηλαδή $g(h) = \left(\frac{x_0}{\alpha}\right) \cdot h$ οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f\left[\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) \cdot h\right]$

Άσκηση 289 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την τιμή $f(0)$

β) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Άσκηση 290 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1) \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

β) Αν η f είναι συνεχής στο $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ) Να δείξετε ότι $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 291 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^* \quad (1), \text{ αν η } f \text{ είναι συνεχής στο } \alpha \neq 0, \text{ να δείξετε ότι}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

Άσκηση 292 Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και τέτοια ώστε:

$$f(x + ky) = f(x) \cdot \sin(ky) + f(k \cdot y) \cdot \sin x + k \cdot x \cdot y \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } k \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να δείξετε ότι είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

Άσκηση 293 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχει $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$