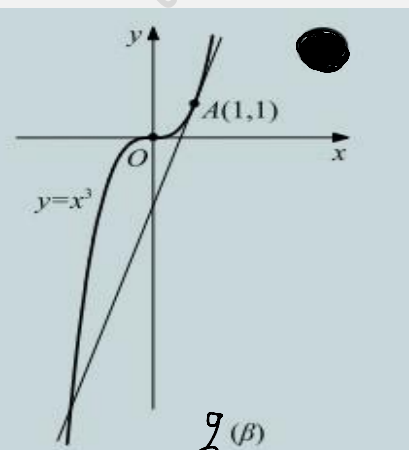
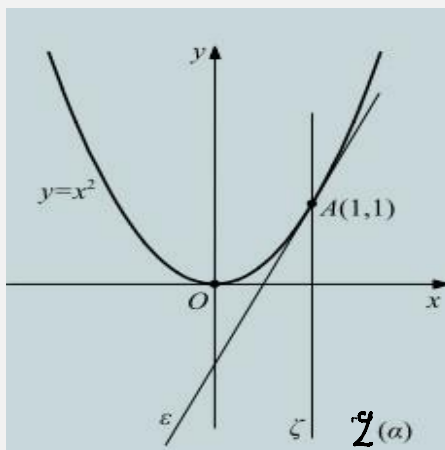
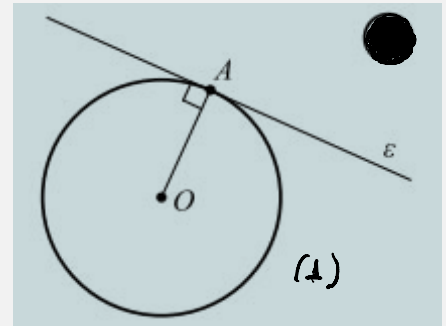


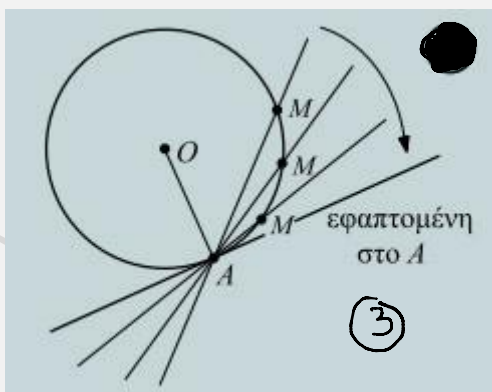
Μάθημα 16 Η έννοια της παραγώγου**04/12/2024****16.1. Παράγωγος αριθμός**

Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του A ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το A και ότι είναι μοναδική. Ο ορισμός αυτός δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη, γιατί με έναν τέτοιο ορισμό η παραβολή $y = x^2$ θα είχε στο σημείο $A(1,1)$ δύο εφαπτόμενες (ε) και (ζ)



(Σχ. 2α), ενώ η $y = x^3$ δεν θα είχε στο σημείο $A(1,1)$ καμία εφαπτομένη (Σχ. 2β).

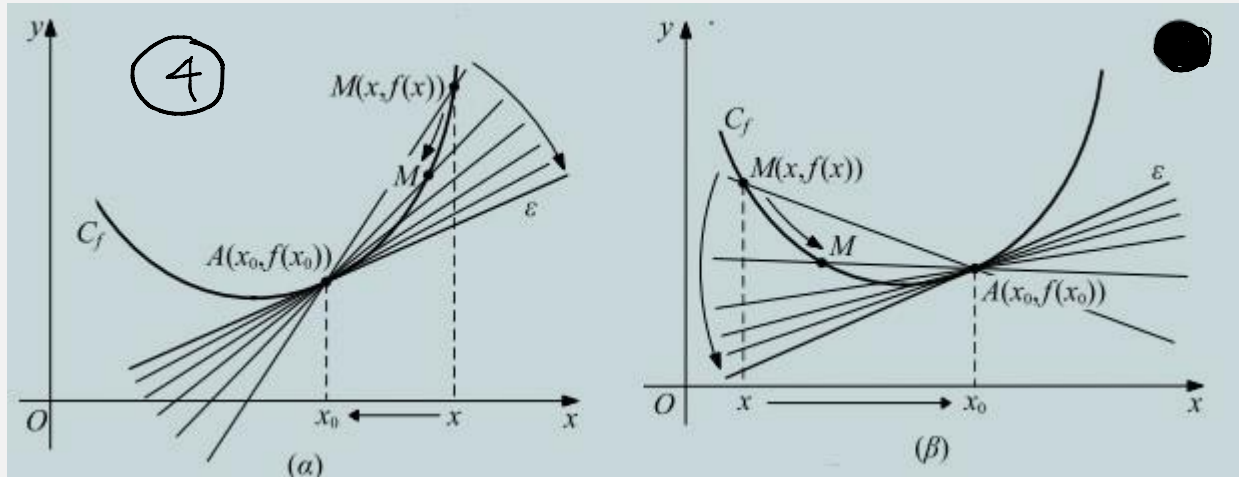
Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε έναν άλλον ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου, ο οποίος να μπορεί να γενικευτεί για όλες τις καμπύλες.



Θεωρούμε, λοιπόν, ένα άλλο σημείο M του κύκλου (Σχ. 3). Τα σημεία A, M ορίζουν μια τέμνουσα του κύκλου, την ευθεία AM . Καθώς το σημείο M , κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει στο A , η τέμνουσα AM φαίνεται να έχει ως "οριακή θέση" την εφαπτομένη του κύκλου στο A .

Τη διαπίστωση αυτή θα δούμε, τώρα, πως μπορούμε να την αξιοποιήσουμε για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.

- Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.



Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x, f(x)), x \neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία AM που ορίζουν τα σημεία A και M , παρατηρούμε ότι :

Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$ ($x \rightarrow x_0^+$), η τέμνουσα AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση (ε) (Σχ. 4α).

Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0

με $x < x_0$ ($x \rightarrow x_0^-$) (Σχ. 4β).

Την οριακή θέση της AM θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A .

Επειδή η κλίση της τέμνουσας AM είναι ίση με $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, είναι λογικό να αναμέ-

νουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό

16.2. Ορισμός της εφαπτομένης

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει

το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξί-

σωση $y - f(x_0) = \lambda \cdot (x - x_0)$, όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

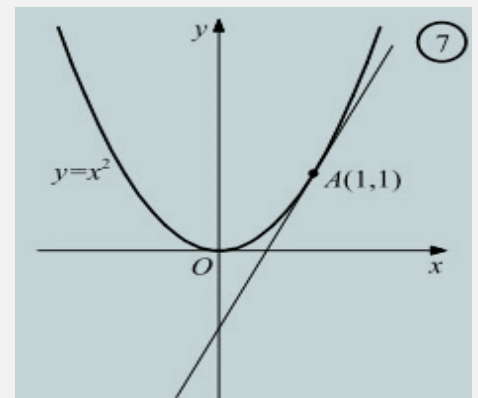
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο της $A(1,1)$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

ορίζεται εφαπτομένη της στο σημείο της $A(1,1)$.

Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$

και εξίσωση $y - 1 = 2(x - 1)$



16.3 Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο: Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και είναι πραγματικός αριθμός.}$$

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος αριθμός της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$

$$\text{ή } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ ή } \frac{df(x_0)}{dx}. \quad \text{Οπότε: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Σχόλια:

α) Αν θέσουμε $x - x_0 = h \Leftrightarrow x = x_0 + h$ τότε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Πολλές φορές η διαφορά $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δ_x και η διαφορά

$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο προηγούμενος τύπος γράφεται: $f'(x_0) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta_x}$

Αυτή η ισότητα οδήγησε τον Leibnitz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$

ή $\frac{df(x_0)}{dx}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

β) Αν θέσουμε $\frac{x}{x_0} = h, x_0 \neq 0 \Leftrightarrow x = x_0 \cdot h$ τότε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0(h-1)} = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{h-1}.$$

γ) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα παρακάτω όρια και είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\bullet \frac{1}{x_0} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{h}, x_0 \neq 0$$

δ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 , δηλαδή $\lambda = f'(x_0)$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$,

ε) Ονομάζουμε κλίση της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ή κλίση της f στο x_0 την κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, δηλαδή τον αριθμό $f'(x_0)$

16.4. Θεώρημα: Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Σχόλια:

1) Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν είναι (υποχρεωτικά) παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Για παράδειγμα: η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0, \text{ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0.$$

$$\text{Είναι: } f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

2) (αντιθετοαντιστροφή)

Αν όμως μια συνάρτηση *δεν είναι συνεχής* σε ένα σημείο x_0 , τότε *δεν είναι παραγωγίσιμη* στο σημείο αυτό.

16.5. Μεθοδολογία - Κατηγορίες Ασκήσεων

Κατηγορία 1η:

Εύρεση του παραγώγου αριθμού της f στο x_0 .

Για να βρούμε τον παράγωγο αριθμό της f στο $x_0 \in D_f$ χρησιμοποιούμε ένα από τους παρακάτω τύπους:

$$(1) \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$(2) \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$(3) \quad f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{h}$$

Αν δίνεται ανισοτική σχέση της μορφής: $h(x) \leq f(x) \leq g(x), x \in A$ τότε:

α) Βρίσκω το $f(x_0)$

β) Εμφανίζω το πηλίκο $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

γ) Εφαρμόζω το κριτήριο παρεμβολής.

Άσκηση 381 Να εξετάσετε αν παραγωγίζεται η f στο x_0 (αν είναι να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης) όταν:

α) $f(x) = x|x| + 2\eta\mu x, \quad x_0 = 0$

β) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x + 1, \quad x_0 = 1.$

γ) $f(x) = x - |x^2 - 2x|, \quad x_0 = 2$

δ) $f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = 0$

ε) $f(1+x) = 2 + 3x + 3x^2 + x^3, \quad x_0 = 1$

στ) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

Άσκηση 382

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \gamma) f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

Άσκηση 383 (Ξένος) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ δεν είναι

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, ενώ η $g(x) = x \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_g εφάπτεται του άξονα $x'x$.

Άσκηση 384 (Ξένος) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ με $f(0) = 0$, να απο-

δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x \cdot f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 385 Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f(0) = f'(0) = 0$, να

αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 386. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) \leq x^4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 387.

α) Να δείξετε ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$i) \lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + g^2(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

β) Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε: $f^2(x) + g^2(x) = x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x = 0$ με $f'(0) = g'(0) = 0$.

Άσκηση 388. Για μια συνάρτηση f ισχύει $\sin 2x \leq f(x) \leq x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 389. Για μια συνάρτηση f ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $x_0 = 0$

Άσκηση 390. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και ικανοποιεί την σχέση: $f^3(x) + 8x \cdot \eta\mu x \cdot f(x) = x \cdot \eta\mu^2 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να βρείτε τον $f'(0)$.

Άσκηση 391. (Μαυρίδης) α) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί την σχέση:

$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί την σχέση: $|f(x) - f(y)|^2 \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Κατηγορία 2^η

Σε ασκήσεις πολλαπλού τύπου όπου το x_0 είναι σημείο αλλαγής τύπου, ζητείται να βρεθούν τιμές παραμέτρων ώστε η να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

- Απαιτούμε η f να είναι συνεχής στο x_0 , οπότε παίρνουμε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων (1), την οποία και επιλύουμε ως προς μία από αυτές.
- Αντικαθιστούμε στο τύπο της συνάρτησης.
- Βρίσκουμε τις πλευρικές παραγώγους στο x_0 , τις εξισώνουμε και προκύπτει άλλη μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων (2).

• Αν δίνεται ότι η f πληροί και κάποια άλλη ιδιότητα, γράφουμε την αλγεβρική σχέση που προκύπτει από αυτήν σχέση (3), και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει.

Άσκηση 392. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (αν υπάρχουν) ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στην αντίστοιχη θέση x_0 .

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & , x > 2 \\ x^3 & , x \leq 2 \end{cases}, x_0 = 2 \quad \beta) f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & , x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + 3} & , x < 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} x^2 - \beta^3 x & , x < 1 \\ \beta \sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

Άσκηση 393. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στην αντίστοιχη θέση x_0 .

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4\alpha x + 2\beta}{x-1} & , x < 1 \\ -\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1 \quad \beta) f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - \beta & , x < 1 \\ \frac{-\gamma}{x} & , x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1 \quad \text{με } f'(1) = -3$$

Κατηγορία 3^η

Από γνωστό όριο θέλουμε να βρούμε τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$ ή να βρούμε κάποιο άλλο όριο.

α) Θεωρούμε g την παράσταση της οποίας γνωρίζουμε το όριο, και την λύνουμε ως προς f .

β) Στο όριο του πηλίκου διαφορών $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, αντικαθιστούμε την f και υπολογίζουμε το όριο.

Σχόλιο: Όταν δίνεται στην υπόθεση ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$, τότε γνωρίζουμε δύο όρια:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ τα οποία θα χρησιμοποιούμε για άρση τυχούσας απροσδιοριστίας.

Άσκηση 394. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ και τέτοια ώστε η εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $x_0 = 3$ να έχει εξίσωση $y = 2x + 1$. Να βρείτε:

α) την τιμή $f(3)$ β) την παράγωγο της f στο $x_0 = 3$ γ) το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+4h) - 7}{h}$

Άσκηση 395. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 2$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = 3, \text{ να δείξετε ότι η } f \text{ είναι και παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2.$$

Άσκηση 396. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$ να

βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - x^2 - 2x}{x^2 - 1}$

Άσκηση 397 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x^2 - 1} = 2$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 4$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(2) = f(3) = 7$ να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει και δεύτερο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f

Άσκηση 398 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και τέτοια

$$\text{ώστε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu(3x)}{x^2 - x} = 1$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε την $f'(0)$

$$\beta) \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu x \cdot \eta\mu(4x)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = 1$$

Άσκηση 399 (Μαυρίδης) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f'(0) < 0 < f'(1)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη.

Άσκηση 400 (Μαυρίδης) Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε $f'(\alpha) > 0$ και $f'(\beta) < 0$. Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(x) > f(\alpha)$ κοντά στο α $f(x) > f(\beta)$ και κοντά στο β
- ii) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.

Κατηγορία 4η

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να βρεθεί κάποιο όριο ή ότι μια συνάρτηση είναι g παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο, με δεδομένη την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο $x_0 = \alpha$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$ θα είναι και συνεχής, άρα ισχύουν:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha),$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$$

Είτε θέτουμε $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, λύνουμε ως προς $f(x)$, αντικαθιστούμε στο ζητούμενο όριο και εμφανίζουμε τα γνωστά όρια,

Είτε προσπαθούμε να εμφανίσουμε στο ζητούμενο όριο τα όρια $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$,

$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$ και στη συνέχεια κάνουμε πράξεις με όρια.

Άσκηση 401. Αν η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$

με $g(\alpha) = g'(\alpha) = 0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} g(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x - \alpha}, & x \neq \alpha \\ 0, & x = \alpha \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$ και ισχύει $f'(\alpha) = 0$

Άσκηση 402. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}^*$ ναδειχθεί ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(\alpha) - \alpha f(x)}{x - \alpha} = f(\alpha) - \alpha \cdot f'(\alpha)$$

Άσκηση 403. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = \alpha$ να

δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[f(1) - f\left(\frac{x}{x+1}\right) \right] = \alpha$

Άσκηση 404. (α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ ναδειχθεί ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha^2 f(x) - x^2 f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha^2 f'(\alpha) - 2\alpha f(\alpha)$$

(β) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$ να αποδείξετε ότι:

$$i) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)\eta\mu x - f(\alpha)\eta\mu \alpha}{x - \alpha} = f'(\alpha)\eta\mu \alpha + f(\alpha)\sigma\upsilon\nu \alpha$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{e^x - e^\alpha} = \frac{f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)}{e^\alpha}$$

Άσκηση 405. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} = (\alpha - \beta) \cdot f'(0) \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

Άσκηση 406. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + 2h) - f(\alpha)}{h} = 2f'(\alpha)$$

$$\beta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{2h} = f'(\alpha)$$

$$\gamma) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + \eta \mu h) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha)$$

$$\delta) \lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f^3(h) - f^3(\alpha)}{\sqrt{h} - \sqrt{\alpha}} = 6\sqrt{\alpha} \cdot f'(\alpha) \cdot f^2(\alpha), \alpha > 0$$

$$\gamma) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\alpha + h) - f^2(\alpha - h)}{h} = 4f(\alpha)f'(\alpha)$$

Άσκηση 407. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

$$\text{Αν είναι } g(x) = \begin{cases} f(x) \eta \mu \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{να δείξετε ότι:}$$

$\alpha)$ η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \eta \mu 2x}{2x - \eta \mu x} = -2$$

Άσκηση 408 Δίνεται ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$$\text{Αν επιπλέον η συνάρτηση } g \text{ με } g(x) = \begin{cases} f^3(x) + 3f(x), & x \leq 1 \\ f(x) - 3, & x > 1 \end{cases} \text{ είναι παραγωγίσιμη}$$

στο $x_0 = 1$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$

Άσκηση 409 Δίνεται ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

$$\text{Αν } g(x) = \begin{cases} f(2x), & x \leq 1 \\ f(4x - 2), & x > 1 \end{cases} \text{ να δείξετε ότι η συνάρτηση } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο}$$

$x_0 = 1$ αν και μόνο αν $f'(2) = 0$

Κατηγορία 5^H

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$, την οποία ξέρουμε ότι:

1. Ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση και
2. Είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$.

Πρέπει να δείξουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ για κάθε $x_0 \in A$.

Είναι γνωστό ότι:

- $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$ και
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$, αφού η f ως παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$ θα είναι και συνεχής.

Στη θέση της μεταβλητής x θα θέσουμε μια συνάρτηση $g(h)$ μη σταθερή με τα εξής χαρακτηριστικά:

- $\lim_{h \rightarrow \alpha} g(h) = x_0$
- Ο τύπος της g επαληθεύει την συναρτησιακή σχέση.

Άσκηση 410 Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$

β) Να δείξετε ότι είναι και $f(x-y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 411 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) - 8xy$ (1), να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 412 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ισχύει: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ (1), να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

Άσκηση 413 (Ξένος) Αν η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ (1), να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x_0) = f'(1) \cdot \frac{f(x_0)}{x_0}$.

Άσκηση 414 (Ξένος) Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) \cdot \sin y + f(y) \cdot \sin x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 415 (Ξένος) Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)} \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = f'(0) \cdot f(x_0)$.

