

Μάθημα 17 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

14/10/2024

17.1.Ορισμοί

- Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι:
 - ❖ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A ή απλά **παραγωγίσιμη** αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in A$
 - ❖ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$
 - ❖ Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

- Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και $A_1 \subseteq A$ το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.

Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ τότε ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ($x \rightarrow f'(x)$) η οποία ονομάζεται (πρώτη) παράγωγος της f ή παράγωγος της f

Η πρώτη παράγωγος της f και συμβολίζεται επίσης με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται «ντε εφ προς ντε χι» (συμβολισμός Leibnitz) ή $\frac{dy}{dx}$ με $y = f(x)$.

Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα την συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$

- Αν η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$, τότε ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $f'' : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$, με την οποία αντιστοιχίζεται κάθε $x \in A_2$ στον αριθμό

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Η συνάρτηση f'' ονομάζεται **δεύτερη** παράγωγος της f , και ισχύει $f'' = (f')'$.

Η δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται επίσης με $\frac{d^2f}{dx^2}$ που διαβάζεται «ντε τετράγωνο εφ προς ντε χι τετράγωνο» (συμβολισμός Leibnitz) ή $\frac{d^2y}{dx^2}$ με $y = f(x)$.

- Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή** παράγωγος της f , που συμβολίζεται με $f^{(v)}$.

Δηλαδή $f^{(v)} : A_v \rightarrow \mathbb{R}$, $A_v \subseteq A_{v-1}$ και $f^{(v)} = [f^{(v-1)}]'$, $v \geq 3$.

17.2. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Παράγωγος Συνάρτηση
$f(x) = c, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (c)' = 0, x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (x)' = 1, x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$	$f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$
$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \alpha^x, \alpha > 0, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha, x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x, x > 0$	$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$
$f(x) = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (\eta \mu x)' = \sigma \nu x, x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sigma \nu x, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (\sigma \nu x)' = -\eta \mu x, x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \varepsilon \varphi x, x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$	$f'(x) = (\varepsilon \varphi x)' = \frac{1}{\sigma \nu^2 x} = 1 + \varepsilon \varphi^2 x,$ $x \in \mathbb{R} - \left\{ \kappa \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \sigma \varphi x, x \in \mathbb{R} - \kappa \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = (\sigma \varphi x)' = \frac{-1}{\eta \mu^2 x} = -1 - \sigma \varphi^2 x,$ $x \in \mathbb{R} - \kappa \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
$f(x) = x^v, x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}^*, v \neq 1, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (x^v)' = v x^{v-1}, x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ για } \begin{cases} x \geq 0, \alpha > 1 \\ x > 0, 0 < \alpha < 1 \\ x > 0, \alpha < 0 \end{cases}$

17.3. Κανόνες παραγωγίσισης

A. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο x_0 τότε:

Οι συναρτήσεις $f+g, f-g, kf, f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και ισχύει	$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$ $(kf)'(x_0) = \kappa \cdot f'(x_0), \kappa \in \mathbb{R}$ $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
Αν $g(x_0) \neq 0$, τότε οι συναρτήσεις $\frac{f}{g}, \frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και ισχύει	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει	$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

B. Έστω f, g παραγωγίσιμες στο διάστημα A .

Οι συναρτήσεις $f+g, f-g, kf, f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμες στο A και ισχύει	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ $(kf)'(x) = \kappa \cdot f'(x), \kappa \in \mathbb{R}$ $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Αν $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$ τότε οι συναρτήσεις $\frac{f}{g}, \frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο A και ισχύει	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

	$\left(\frac{1}{g}\right)' \cdot x = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$
Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $f^{-1}(A)$, τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει	$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
Αν $f(x) = u$ και $y = g(u)$ τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται	$g(u)' = g'(u) \cdot u'$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (κανόνας αλυσίδας)

Γ. Παράγωγος Σύνθετης συνάρτησης

$f^\alpha(x)' = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)$
$\sqrt{f(x)}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, f(x) > 0$
$a^{f(x)}' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
$\ln f(x) ' = \frac{f'(x)}{f(x)}, f(x) \neq 0$
$\eta\mu f(x)' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
$\sigma\upsilon\nu f(x)' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
$\epsilon\phi f(x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$\sigma\phi f(x)' = \frac{-1}{\eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x) = \frac{-1}{1 + \eta\mu^2 f(x)} \cdot f'(x)$

$$f(x)^{g(x)'} = e^{g(x) \ln f(x)'} = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot g(x) \cdot \ln f(x)' = f(x)^{g(x)} \cdot g(x) \cdot \ln f(x)'$$

Δ. Η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, αν οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι παραγωγίσιμες στο A και στο $f(A)$ αντίστοιχα και $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ τότε $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Πράγματι ξέρουμε ότι $f(f^{-1}(x)) = x, x \in f(A)$ οπότε $[f(f^{-1}(x))]' = (x)'$, άρα

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1 \quad \text{ή} \quad f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ε. Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις

Όταν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και δίνεται μια ισότητα με δύο μεταβλητές, έστω x, y τότε θεωρώντας την μια μεταβλητή σταθερή παραγωγίζουμε ως προς την άλλη

Ε. Σημαντικές επισημάνσεις – παρατηρήσεις:

α) Αν η $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο A , αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι οι f, g είναι και οι δύο παραγωγίσιμες στο A

β) Αν μία μόνο από τις f, g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η $(f+g)$ και η $(f-g)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ) Αν όμως μία μόνο από τις f, g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν ξέρουμε αν η $(f \cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη ή όχι στο x_0 .

δ) Μπορεί η $|f|$ να είναι παραγωγίσιμη στο A , χωρίς να είναι κατ' ανάγκη η f παραγωγίσιμη στο A .

ε) Η συνάρτηση $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - 0, 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = vx^{v-1}$.

Ο τύπος δεν εφαρμόζεται για $v = 0$, γιατί:

Για $x = 0$ το $f(0) = 0^0$, που δεν ορίζεται

Για $v = 1$, $f'(0) = 1 \cdot 0^0$, που πάλι δεν ορίζεται.

στ) Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, έχει πεδίο ορισμού:

- το σύνολο $A = [0, +\infty)$ όταν $\alpha > 0$, και παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Αν είναι $\alpha > 1$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.

- το σύνολο $A = (0, +\infty)$ όταν $\alpha < 0$, και παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

ζ) Προσοχή!!!

Οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{\mu}{\nu}}$ και $g(x) = \sqrt[\nu]{x^\mu}$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ δεν είναι ίσες.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ έχει πεδίο ορισμού το $A_f = [0, +\infty)$ και η

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2} \text{ έχει πεδίο ορισμού το } A_g = \mathbb{R} \text{ και είναι } g(x) = \sqrt[3]{x^2} = |x|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} & , x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}} & , x < 0 \end{cases}$$

η) Η συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$, είναι παρα-

γωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με $f'(x) = (\log_\alpha x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln \alpha} \right)' = \frac{1}{x \ln \alpha}$

$$\text{Για την } f(x) = \log_\alpha g(x), f'(x) = (\log_\alpha g(x))' = \left(\frac{\ln g(x)}{\ln \alpha} \right)' = \frac{g'(x)}{g(x) \cdot \ln \alpha}$$

θ) Αν η f παραγωγίσιμη τότε η f' δεν είναι αναγκαία συνεχής.

$$\text{Πράγματι έστω η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2 \ln \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αλλά η f' δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Απόδειξη

Για $x \neq 0$ είναι

$$f'(x) = \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)' = 2x \eta\mu \frac{1}{x} + x^2 \left(\eta\mu \frac{1}{x} \right)' = 2x \eta\mu \frac{1}{x} + x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}.$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} = 0, \text{ γιατί:}$$

$$\text{για } x \neq 0: \left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \text{ άρα } -|x| \leq x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x| \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \text{ σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής θα είναι και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \eta\mu \frac{1}{x} = 0, \text{ άρα } f'(0) = 0$$

$$\text{Οπότε } f'(x) = \begin{cases} 2x \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f' δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ γιατί το $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ δεν υπάρχει

ι) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) = g(x)$ τότε και $f'(x) = g'(x)$. (Δηλαδή μπορούμε να παραγωγίζουμε ισότητες)

Το αντίστροφο δεν ισχύει:

Αν $f(x) = 2x + 3$ και $g(x) = 2x + 1$, τότε $f'(x) = g'(x) = 2$ ενώ $f(x) \neq g(x)$

ια) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ τότε δεν ισχύει γενικά ότι $f'(x) \leq g'(x)$.

(Δηλαδή ποτέ δεν θα παραγωγίζουμε ανισότητες)

12) Λογαριθμική Παραγωγή

Θέλουμε να βρούμε τη παράγωγο μιας συνάρτησης της οποίας ο τύπος είναι γινόμενο πολλών παραγόντων

- Αν δεν είναι όλοι οι παράγοντες θετικοί, παίρνουμε την απόλυτο τιμή του τύπου της.
- Λογαριθμίζουμε και μετά παραγωγίζουμε.

Για παράδειγμα: να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-100) \text{ με } x \neq 1, 2, \dots, 100$$

$$\text{Είναι } |f(x)| = |x-1| \cdot |x-2| \cdots |x-100|, \text{ άρα } \ln|f(x)| = \ln|x-1| + \ln|x-2| + \cdots + \ln|x-100|$$

$$\text{Οπότε: } [\ln|f(x)|]' = [\ln|x-1| + \ln|x-2| + \cdots + \ln|x-100|]', \text{ άρα}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-100}$$

Κατηγορία 6^η :

Εύρεση της παραγώγου συνάρτησης της f.

α) Βρίσκουμε τα σημεία του πεδίου ορισμού της **f** στα οποία **αμφισβητείται** η παραγωγισιμότητα.

Στα σημεία αυτά ελέγχουμε αν είναι παραγωγίσιμη με τον ορισμό.

Στο υπόλοιπο του πεδίου ορισμού, βρίσκουμε την παράγωγο συνάρτηση με τους κανόνες παραγωγίσιμης.

β) Σημεία στα οποία **αμφισβητείται η παραγωγισιμότητα**.

i) Τα σημεία αλλαγής τύπου (κλαδικές)

ii) Τα σημεία μηδενισμού των απολύτων

iii) Τα σημεία μηδενισμού των υπορριζών, σημεία μηδενισμού της βάσης στις άρρητες συναρτήσεις ή στις συναρτήσεις που περιέχουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη αντίστοιχα.

Άσκηση 416 Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{5}{x^3}, x \neq 0$

β) $f(x) = \frac{1-x^4}{\sqrt{e}}$

γ) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

δ) $f(x) = x^2 \cdot \ln x, x > 0$

ε) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2e^x$

στ) $f(x+y) = xe^y + ye^{2x}$ με $x, y \in \mathbb{R}$

ζ) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

Άσκηση 417. Να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

β) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x-4}$

γ) $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$

δ) $f(x) = \frac{\eta\mu x - x \sin x}{\sin x + x \eta\mu x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Άσκηση 418. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \eta\mu 3x$

β) $f(x) = \ln^2(3x+1)$

γ) $f(x) = e^{x+x^2}$

δ) $f(x) = e^{1+x^2} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

ε) $f(x) = \eta\mu^2 3x$

στ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, x < 0$

ζ) $f(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^x - e^{-x}}$

η) $f(x) = \sqrt[5]{|x|^3}$

θ) $f(x) = e^{2x}(x^2-1)$

Άσκηση 419. Να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x|x| + 2\eta\mu x$

β) $f(x) = \sqrt{x^2-x} + x + 1$

γ) $f(x) = x - |x^2 - 2x|$

δ) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Άσκηση 420. Να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{\sin x + \eta\mu\theta}{e^x}$

β) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

γ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

δ) $f(x) = (3x^2 + x)^{-5}$

ε) $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 1}$

στ) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$$\zeta) f(x) = x^3 \eta \mu^2(\pi x) \quad \eta) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + 3^{\sqrt{x}} \quad \theta) f(x) = (\ln x)^{\ln x}$$

Άσκηση 421. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & , x \leq 1 \\ 2x^3 & , x > 1 \end{cases}$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f'(x)$

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $f''(x)$

Άσκηση 422. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x - x \cdot \sigma \nu \nu x$

Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x}$

Άσκηση 423. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^5 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f'(-x)$

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $(f(-x))'$

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περριτική

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(-x+h)}{h} = 10x^4 + 2$

Άσκηση 424. Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1}$ για κάθε $x \geq 1$

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων: α) $f(x)$ β) $g(x) = \ln(f(x))$

Άσκηση 425. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1)^x, x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^x - 1}{x}$

Άσκηση 426. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περριτική

β) Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια

γ) Αν η f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ τότε η f' είναι περιοδική, με περίοδο T .

Άσκηση 427.

α) Αν $f(x) = x^2 \ln x$, να δείξετε ότι: $f'(x) - xf''(x) + 2x = 0$

β) Αν $f(x) = x \ln(x)$, να δείξετε ότι: $x^2 f''(x) - xf'(x) + 2f(x) = 0$

γ) Αν $f(x) = e^{-\lambda x}$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $2f''(x) + f'(x) - 3f(x) = 0$

Άσκηση 428.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε την $f''(x)$ συναρτήσει της $f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = 4 \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 429. Να βρείτε μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύουν:

α) $P''(2020) + P(1) = 2$ και $[P'(x)]^2 = 4P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $P(x) - P'(x) = x^2 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

γ) $P(2x) = P'(x) \cdot P''(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 430. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $2f(x^2) + f(x^3) = 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - 1}{x - 1}$

Άσκηση 431. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(e^{2x}) + 3f(x^3 + 1) = 2(x^2 + 5x + 4), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε το $f(1)$

β) Να βρείτε την $f'(1)$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 4}{x^2 - 3x + 2}$

Άσκηση 432. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)\eta\mu x - f(\alpha)\eta\mu\alpha}{x - \alpha} = f'(\alpha)\eta\mu\alpha + f(\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{e^x - e^\alpha} = \frac{f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)}{e^\alpha}$$

Άσκηση 433. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι "1-1" και τέτοια ώστε οι συναρτήσεις f και f^{-1} να είναι παραγωγίσιμες

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ για κάθε } x \in f(\mathbb{R})$$

β) Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.