

Μάθημα 26**Κριτήριο Ακροτάτων****25/02/2025****ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΠΙΚΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ**

26.6. Θεώρημα Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως είναι **συνεχής**.

α) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

β) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

γ) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνήσια μονότονη στο (α, β) .

26.1. Παρατηρήσεις:

α) Αν η f είναι γνήσια μονότονη σε **ανοικτό διάστημα** τότε δεν έχει ακρότατα.

β) Αν η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει, όπως είναι γνωστό ολικά ακρότατα που βρίσκουμε ως εξής:

- Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .
- Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και επιπλέον τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.
- Η μεγαλύτερη από όλες αυτές τις τιμές είναι το ολικό μέγιστο M , και μικρότερη από όλες αυτές τις τιμές είναι το ολικό ελάχιστο m , οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $f(\Delta) = [m, M]$, όταν η f δεν είναι σταθερή.

26.2.Μεθοδολογία

Α. Κατηγορία: Για να προσδιορίσουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης, βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο, τις ρίζες και το πρόσημο αυτής, και κατασκευάζουμε το παρακάτω πίνακα μεταβολών.

Σε περιπτώσεις που δεν μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της $f'(x)$, βρίσκουμε το πρόσημο της $f''(x)$ ή της $f^{(3)}(x)$ κ.ο.κ.

x	Πεδίο ορισμού της $f(x)$, ρίζες της $f'(x)$, $f''(x)$ σημεία που δεν ορίζεται η $f'(x)$
Πρόσημο της $f''(x)$	
Μονοτονία της $f'(x)$	
Πρόσημο της $f'(x)$	
Μονοτονία της $f(x)$	

Σχόλιο:

Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο **μόνο** σε μία θέση x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε: $f(x) < f(x_0)$ ή $f(x) > f(x_0)$ αντίστοιχα για κάθε $x \neq x_0$

Αν επιπλέον ισχύει: $f(x_0) \leq 0$ ή $f(x_0) \geq 0$ αντίστοιχα, μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της f

Άσκηση 724 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\beta) f(x) = \ln(\ln x) - \ln x$$

$$\gamma) f(x) = 3\ln x - 8x^3$$

$$\delta) f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

$$\varepsilon) f(x) = |x^2 - x - 2|$$

$$\sigma\tau) f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & x \geq 1 \end{cases}$$

Άσκηση 725 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = e^{-2x^3 + 6x^2}$$

$$\beta) f(x) = -\ln^2 x - 2\ln x + x \ln x$$

$$\gamma) f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$\delta) f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{3} \cdot \eta\mu x, x \in [0, \pi]$$

$$\varepsilon) f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

$$\sigma\tau) f(x) = e^x - \ln(x+1) + 2$$

Άσκηση 726 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^v}, x > 0$.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

β) Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq \left(\frac{xe}{v}\right)^v, v \in \mathbb{N}$

Άσκηση 727 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1+x)^x$

α) Να καθορίσετε το πεδίο ορισμού της D_f

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $(1+x)^x \geq 1$

Άσκηση 728 Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}\eta\mu x, x \in [0, \pi]$$

$$\beta) g(x) = 2\eta\mu 2x + \eta\mu 4x, x \in [0, \pi]$$

$$\gamma) h(x) = 6\sigma\upsilon\nu^2 x + 6\eta\mu x - 2, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Άσκηση 729 Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0, f''(x) < 0, x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0, x \in (\alpha, \beta)$.

Άσκηση 730 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει:

$$\bullet e^{f(x)} - e \cdot f(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\bullet f'(0) \neq 0$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι: $\frac{f(x)-f(0)}{x} > 0$, για κάθε $x \neq 0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x^2) - f(1+2\ln x) \geq 0$, για κάθε $x > 0$

Άσκηση 731 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x-\alpha)^2 \cdot (x-\beta)^2 \cdot (x-\gamma)^2$, με $\alpha < \beta < \gamma$ έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα

Άσκηση 732 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $x^2 f''(x) + 3(1-e^x)f'(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και παρουσιάζει στο $x_0 = \alpha$ τοπικό ακρότατο, να αποδείξετε ότι αυτό είναι τοπικό ελάχιστο αν $\alpha \neq 0$ και τοπικό μέγιστο αν $\alpha = 0$

Άσκηση 733 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \frac{2}{x}$

α). Να δείξετε ότι η παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο στο x_0 και να βρείτε το είδος του.

β). Να δείξετε ότι $x_0 > -1$

γ). Να δείξετε ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}$ και στη συνέχεια, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της h

δ). Να δείξετε ότι $f(x) > 4$ για κάθε $x < 0$

Άσκηση 734 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon f x - x + \ln(\sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η C_f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο στη θέση x_0 με $x_0 < \frac{\pi}{6}$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0)$ έχει μοναδική λύση

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ασκηση 735

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

δ) Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \leq 2 \text{ να υπολογίσετε τους } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ασκηση 736

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι: $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$.

Ασκηση 737

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = |3x + \alpha \cdot \varepsilon \phi x - 2\eta \mu x| \quad (\text{για κάποιο } \alpha \in \mathbb{R})$$

α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$

γ) Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς την απόλυτη τιμή και να

χαράξετε μια «πρόχειρη» γραφική παράσταση της f

δ) Να βρείτε την εξίσωση κάθε οριζόντιας εφαπτομένης της C_f

B. Κατηγορία: Πρόσημο των τιμών της συνάρτησης από το πρόσημο του ολικού ακροτάτου - Λύση εξίσωσης, ανίσωσης

Στην κατηγορία αυτή θα δούμε ασκήσεις στις οποίες συνδυάζουν το πρόσημο του ολικού ακροτάτου με το πρόσημο των τιμών της f

- Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση x_0 και είναι $f(x_0) = 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D_f - \{x_0\}$
- Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση x_0 και είναι $f(x_0) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in D_f$

και για την εξίσωση $f(g(x)) = f(x_0)$ έχουμε: $f(g(x)) = f(x_0) \Leftrightarrow g(x) = x_0$

- Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στη θέση x_0 και είναι $f(x_0) = 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in D_f - \{x_0\}$
- Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στη θέση x_0 και είναι $f(x_0) < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in D_f$

και για την εξίσωση $f(g(x)) = f(x_0)$ έχουμε: $f(g(x)) = f(x_0) \Leftrightarrow g(x) = x_0$

Ασκηση 738 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6 \ln x$, $x > 0$

Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, -8)$

Ασκηση 739

- Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x^2 + 1$ για κάθε $x \geq 0$.
- Αν $x, y > 0$ με $x + y = 1$ να αποδείξετε ότι $x \ln x + y \ln y \geq -\ln 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- Αν είναι $\alpha, \beta \geq 0$ να αποδειχθεί ότι $3\alpha^3 + 7\beta^3 \geq 9\alpha\beta^2$

Ασκηση 740 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{9}{4}$, $x > 0$ και $g(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}$

α) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων f, g

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

Ασκηση 741 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, με $0 < \alpha \neq 1$

α). Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

β). Για $\alpha = e$

i). να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα.

ii). να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

iii). αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

Ασκηση 742 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 + 6x + 7$

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(x) - 2}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + (x+1)^2 = 2$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 83$

ε) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες ισχύει: $3f(\alpha) + 2f(\ln \beta) = 10$.

Ασκηση 743 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - \ln x$ με $x \in (0, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$ να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha + \beta + \gamma$.

γ) Αν $f(e^{\eta\mu x} - \eta\mu x) = 0$ να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$

Γ. Κατηγορία: Σύνολο τιμών, ρίζες εξίσωσης.

Στην κατηγορία αυτή θα δούμε ασκήσεις οι οποίες συνδυάζουν το σύνολο τιμών με τις ρίζες ή το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

Άσκηση 744 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$

Να δείξετε ότι:

α) είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

β) η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \alpha$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Άσκηση 745

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $f(e) = 0$

• $f'(x) = \frac{f(x)}{x} - e^{\frac{f(x)}{x}}$, για κάθε $x > 1$

α). Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -x \cdot \ln(\ln x)$.

β). Να βρείτε τη μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

γ). Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\ln x)^x = \frac{1}{m}$, $x \in (1, +\infty)$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $m > 0$.

δ). Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + 2) - f(3x) < 3x - x^2 - 2$

Άσκηση 746 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$

α). Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$

β). Να βρείτε την παράγωγο της f

γ). Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

δ). Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει: $\frac{f(x+1) - f(x)}{x} > 1 + \ln x^2$

ε). Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{f(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{f(x)}{x^2} \right) \cdot \sin 3x \right]$

Άσκηση 747

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

- $f''(x)e^{-x} = (f'(x))^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $2f'(0) + 1 = 0$ και
- $f(0) = \ln 2$

α). Να δείξετε ότι $f'(x) + 1 = \frac{e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

β). Να δείξετε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (3 μονάδες) και στη συνέχεια ότι $f(x-2) > 2f(x+1) - f(x+4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (3 μονάδες)

γ). Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(1+e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$

δ).i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}

Άσκηση 748 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και

$$e^{2f(x)} + 2xe^{f(x)} = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α). Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

β). Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ). Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2024 = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση.

δ). Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{f(x)} - 1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x^4 + x^2}$

Άσκηση 749 Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

α). Να δείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα

β). Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ .

γ). Να δείξετε ότι η φ έχει μοναδική ρίζα.

δ). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \sqrt{x}$

Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο A της C_f και σημείο B της C_g ώστε οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα A, B να είναι παράλληλες.

Άσκηση 750 Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$

α). Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ). Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Άσκηση 751 Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και σύνολο τιμών το διάστημα $[m, M]$ όπου $m < 0 < M$. Να αποδείξετε ότι:

α). Υπάρχουν σημεία x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

β). Υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f''(x_3) = 0$

γ). Η εξίσωση $f(x) + f'(x) \cdot f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

δ). Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $[f'(x)]^2 + f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Άσκηση 752

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία δίνονται:

$$\bullet f''(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 2] \quad \bullet f(1) = 0, f(2) = 2, f'(2) = 1$$

α). Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β). Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f .

γ). Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$, ώστε $f''(x_0) < -1$.

δ). Να δείξετε ότι:

i) $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > \frac{f(2) - f(x)}{2 - x}$ για κάθε $x \in (1, 2)$

ii) $f(x) \geq 2(x - 1)$ για κάθε $x \in [1, 2]$

δ). Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2 - x$ τέμνει ακριβώς σε ένα και μόνο σημείο τη C_f .

ε). Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 2)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = f'(\xi_1) + 2$

Άσκηση 753

α). Να δείξετε ότι $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

β). Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & , x > 0 \\ e & , x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = e^x - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

iii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση h ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με $h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \geq 0 \\ g(x) & , x < 0 \end{cases}$, να δείξετε ότι

η h είναι "1-1".

Άσκηση 754

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) + xf''(x) > f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α). Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = (x-1)f'(x)$

β). Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2+1) > f(2x), x \in \mathbb{R}$

γ). Να αποδείξετε ότι: $f(e^x - \ln x) > f(x), x \in (0, +\infty)$

δ). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \frac{1}{x} + 1$ έχει μοναδική θετική λύση x_0 .

ε). Αν $h(x) = e^x - \frac{1}{x} - 1, x > 0$ και $\alpha < x_0 < \beta$, όπου x_0 ο αριθμός του προηγούμενου ερωτήμα-

τος, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{h^2(\alpha)}{x-1} + \frac{h(\beta)}{x} = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

στ). Να βρείτε την τιμή του αριθμού $k \in (0, +\infty)$ για τον οποίο ισχύει:

$$\ln\left(\frac{k}{e}\right) \cdot f'(\ln k) + k \cdot f'(1-k) = 0$$

