

Μάθημα 34 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες 31/03/2024

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $[a, b]$ τότε από το τύπο της παραγώγισης του γινομένου

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f(x) \cdot g'(x)$$

με ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b (f(x) \cdot g(x))' dx - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Παράδειγμα 1

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\eta \mu x)' dx = [x \eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \eta \mu x dx = \left(\frac{\pi}{2} \eta \mu \frac{\pi}{2} - 0 \right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx = \frac{\pi}{2} + [\sigma \nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} + [\sigma \nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left(\sigma \nu \frac{\pi}{2} - \sigma \nu 0 \right) = \frac{\pi}{2} + (0 - 1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Σχόλια:

α) Ο τύπος αυτός εφαρμόζεται όταν θέλουμε να βρούμε το ολοκλήρωμα ενός γινομένου, και δεν είναι εύκολος ο προσδιορισμός μιας παράγουσας της προς ολοκλήρωσης συνάρτησης.

β) Αντικαθιστούμε ένα παράγοντα του γινομένου με μια παράγουσα του, αν το ολοκλήρωμα που προκύπτει στο δεύτερο μέλος είναι πιο δύσκολο, τότε βρίσκουμε παράγουσα του άλλου παράγοντα.

γ) Παρακάτω θα εξετάσουμε τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

1η Μορφή $\int_a^b P(x) \cdot \alpha^{f(x)} dx$, $P(x)$ πολυώνυμο.

Γράφουμε ως παράγουσα την εκθετική $\alpha^{f(x)} = (g(x))'$ και έχουμε:

$$\int_a^b P(x) \cdot \alpha^{f(x)} dx = \int_a^b P(x) (g(x))' dx = [P(x) g(x)]_a^b - \int_a^b P'(x) g(x) dx$$

Είναι σύνηθες να κάνουμε κατά παράγοντες περισσότερο από μια φορά.

Παράδειγμα 2

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^x dx &= \int_0^1 x^2 (e^x)' dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' e^x dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = \\ &= (e-1) - 2 \int_0^1 x (e^x)' dx = e-1 - 2 \left(\left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) = e-1 - 2 \left(e-0 - \left[e^x \right]_0^1 \right) = \\ &= e-1 - 2(e-e+1) = e-3\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{3^x} dx &= \int_0^1 x 3^{-x} dx = -\frac{1}{\ln 3} \int_0^1 x (3^{-x})' dx = -\frac{1}{\ln 3} \left[x \cdot 3^{-x} \right]_0^1 + \frac{1}{\ln 3} \int_0^1 (x)' 3^{-x} dx = \\ &= -\frac{1}{\ln 3} \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \frac{1}{\ln 3} \int_0^1 3^{-x} dx = -\frac{1}{3 \ln 3} - \frac{1}{\ln^2 3} \left[3^{-x} \right]_0^1 = -\frac{1}{3 \ln 3} - \frac{1}{\ln^2 3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \\ &= -\frac{1}{3 \ln 3} + \frac{2}{3 \ln^2 3} = \frac{2 - \ln 3}{3 \ln^2 3}\end{aligned}$$

2η Μορφή $\int_a^b P(x) \cdot \eta\mu(f(x)) dx$ ή $\int_a^b P(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(f(x)) dx$, $P(x)$ πολυώνυμο.

Γράφουμε ως παράγουσα την τριγωνομετρική και εργαζόμαστε όπως προηγούμενα.

Παράδειγμα 4

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x \sigma\upsilon\nu x dx &= \int_{-\pi}^{\pi} x (\eta\mu x)' dx = \left[x (\eta\mu x) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (x)' \eta\mu x dx = \pi \eta\mu \pi - (-\pi) \eta\mu(-\pi) + \left[\sigma\upsilon\nu x \right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \sigma\upsilon\nu(\pi) - \sigma\upsilon\nu(-\pi) = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

3η Μορφή $\int_a^b P(x) \cdot \ln(f(x)) dx$, $P(x)$ πολυώνυμο.

Γράφουμε ως παράγουσα την πολωνυμική.

Παράδειγμα 5

$$\begin{aligned}\int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right) (\ln x)' dx = \\ &= \left[\left(\frac{e^3}{3} + e \right) \ln e - \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) \ln 1 \right] - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} + e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \\ &= \frac{e^3}{3} + e - \left[\frac{x^3}{9} + x \right]_1^e = \frac{e^3}{3} + e - \left[\left(\frac{e^3}{9} + e \right) - \left(\frac{1^3}{9} + 1 \right) \right] = \frac{e^3}{3} + e - \frac{e^3}{9} - e + \frac{1}{9} + 1 = \frac{4e^3}{9} + \frac{10}{9}\end{aligned}$$

4η Μορφή $I = \int_{\alpha}^{\beta} e^{\kappa x} \cdot \eta\mu(\lambda x) dx$ ή $I = \int_{\alpha}^{\beta} e^{\kappa x} \cdot \sigma\upsilon\nu(\lambda x) dx$ με $\kappa, \lambda \neq 0$.

Γράφουμε ως παράγουσα όποια θέλουμε, συνήθως κάνουμε δύο παραγοντικές, και συνεχίζουμε με την ίδια παράγουσα.

Στη διαδικασία αυτή εμφανίζεται το αρχικό ολοκλήρωμα I , και λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση ως προς I .

Παράδειγμα 6

$$I = \int_0^{\pi} e^{2x} \eta\mu x dx = \int_0^{\pi} e^{2x} (-\sigma\upsilon\nu x)' dx = -[e^{2x} (\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (e^{2x})' (\sigma\upsilon\nu x) dx =$$

$$= -[e^{2\pi} (\sigma\upsilon\nu \pi) - e^0 (\sigma\upsilon\nu 0)] + 2 \int_0^{\pi} e^{2x} (\sigma\upsilon\nu x) dx = -(-e^{2\pi} - 1) + 2 \int_0^{\pi} e^{2x} (\eta\mu x)' dx =$$

$$= -(-e^{2\pi} - 1) + 2[e^{2x} \eta\mu x]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} e^{2x} \eta\mu x dx = e^{2\pi} + 1 + 2(e^{2\pi} \eta\mu \pi - e^0 \eta\mu 0) - 2I$$

$$\text{Άρα } I = e^{2\pi} + 1 - 2I \Leftrightarrow 3I = e^{2\pi} + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^{2\pi} + 1}{3}.$$

5η Μορφή $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) \cdot f(x) dx$

Η μέθοδος χρησιμοποιείται και σε άλλες μορφές γινομένων αρκεί να είναι γνωστή η παράγουσα ενός παραγόντα

Παράδειγμα 7

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (\epsilon\phi x)' dx = [x (\epsilon\phi x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi x dx = \left(\frac{\pi}{4} \epsilon\phi \frac{\pi}{4} - 0 \epsilon\phi 0 \right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{\pi}{4} + [\ln |\sigma\upsilon\nu x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \left(\ln \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \ln \sigma\upsilon\nu 0 \right) = \frac{\pi}{4} + \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 \right) = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6η Μορφή Ολοκλήρωμα αρχικής συνάρτησης

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι:

i). $\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = \beta F(\beta) - \alpha F(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx$

ii). Αν $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $F(1) = e$ τότε $\int_0^1 F(x) dx = \frac{e+1}{2}$

Λύση

i). Αφού F παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x') F(x) dx = [xF(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xF'(x) dx = \beta F(\beta) - \alpha F(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx$$

ii). Σύμφωνα με το (i) ερώτημα για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x) dx &= 1 \cdot F(1) - 0 \cdot F(0) - \int_0^1 xf(x) dx = e - \int_0^1 xe^{x^2} dx = e - \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} dx = e - \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \\ &= e - \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = e - \frac{1}{2}(e - 1) = \frac{e+1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 926 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 3x dx \quad \beta) \int_0^{\pi} x^2 \eta \mu x dx \quad \gamma) \int_0^{\pi} (x+2) \eta \mu x dx \quad \delta) \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$\epsilon) \int_1^e x^2 \ln x dx \quad \sigma\tau) \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad \zeta) \int_0^{\pi} e^{2x} \sigma \upsilon \nu x dx \quad \eta) \int_1^4 \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Άσκηση 927 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{8}} 16x \sin 4x dx \quad \beta) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-x}{\eta \mu^2 x} dx \quad \gamma) \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx \quad \delta) \int_{-1}^0 (x+1) e^{-x} dx.$$

$$\epsilon) \int_1^e (3x^2 + 1) \ln x dx \quad \sigma\tau) \int_1^e \frac{x^2 - x + 1}{x} \ln x dx \quad \zeta) \int_2^{e+1} \ln(x-1) dx \quad \eta) \int_1^e (2x^3 + 1) \ln x dx.$$

Άσκηση 928 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \sin(\ln x) dx$

Άσκηση 929 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $4f^3(x) + 2f(x) = 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$

Άσκηση 930 Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο με $f'(\pi) = 3$ και $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f''(x) + f(x)) \sigma \upsilon \nu x dx = -2$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(\pi, f(\pi))$.

Άσκηση 931 Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο με $f'(2) = f(2)$ και $\int_0^2 xf''(x)dx = 3$. Να δείξετε ότι $f(0) = 3$.

Άσκηση 932 Αν $I_v = \int_0^1 x^v e^x dx, v \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι $I_v = e - vI_{v-1}$ και να υπολογίσετε το I_4 .

Άσκηση 933 Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^v x dx, v \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι $I_v = \frac{v-1}{v} I_{v-2}, v \geq 2$ και να υπολογίσετε το I_4 .

Άσκηση 934 Αν $I_v = \int_1^e \ln^v x dx, v \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι $I_v = e - vI_{v-1}, v \geq 1$ και να υπολογίσετε το I_3 .

Άσκηση 935 Αν $I_v = \int_0^2 \frac{e^{vx}}{1+e^{vx}} dx, v \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{v}(e^{2v} - 1)$ και να υπολογίσετε το I_2 .

Άσκηση 936 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και $f'(\alpha) = f'(\beta) = g'(\alpha) = g'(\beta) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x)g''(x) - f''(x)g(x))dx = (\beta - \alpha)[f'(\xi_1) - g'(\xi_2)]$.

Άσκηση 937 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο τέτοια ώστε $\int_0^1 (xf'(x) + 2f(x))dx = 0$. Να δείξετε ότι $\int_0^1 2f(x)dx = -f(1)$

Άσκηση 938 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 [f^2(x)]' e^{f(x)} dx$

Άσκηση 939 Δίνεται μια άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} (xf''(x) - f'(x))dx = 0$

Άσκηση 940 Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \varphi^v x dx, v \in \mathbb{N}^*$ να δείξετε ότι $I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}, v > 2$ και να υπολογίσετε το I_4 .

