

Μάθημα 35 Ολοκλήρωση Ρητών συναρτήσεων 02/04/2024

35.1. Ρητή λέμε κάθε συνάρτηση f η οποία γράφεται ως πηλίκο δύο πολυωνύμων,

$$\text{δηλαδή } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ με}$$

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \alpha_v \neq 0, v \in \mathbb{N}^*$$

$$Q(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0, \beta_\mu \neq 0, \mu \in \mathbb{N}^*$$

35.2. Το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

A. Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε άμεσα αρχική συνάρτηση.

Τέτοιες είναι:

$$\text{i)} I = \int_a^\beta \frac{1}{x^v} dx = \int_a^\beta x^{-v} dx = \left[\frac{x^{-v+1}}{-v+1} \right]_a^\beta \text{ με } v \neq 1. \text{ Αν } v=1 \text{ τότε } I = \int_a^\beta \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_a^\beta$$

$$\text{ii). } I = \int_a^\beta \frac{1}{(κx - λ)^v} dx = \int_a^\beta (κx - λ)^{-v} dx = \frac{1}{κ} \int_a^\beta (κx - λ)' (κx - λ)^{-v} dx = \frac{1}{κ} \left[\frac{(κx - λ)^{-v+1}}{-v+1} \right]_a^\beta \text{ με } v \neq 1.$$

$$\text{Αν } v=1 \text{ τότε } I = \int_a^\beta \frac{1}{(κx - λ)} dx = \frac{1}{κ} \int_a^\beta \frac{(κx - λ)'}{κx - λ} dx = \frac{1}{κ} [\ln|κx - λ|]_a^\beta$$

Παράδειγμα 1

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \int_0^2 (2x+1)^{-3} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (2x+1)' (2x+1)^{-3} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(2x+1)^{-2}}{-2} \right]_0^2 = \\ &= -\frac{1}{4} \left[(5^{-2}) - (1)^{-2} \right] = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{25} - 1 \right) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-24}{25} = \frac{6}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} I &= \int_a^\beta \frac{κ}{(x-λ)(x-μ)} dx = \frac{κ}{μ-λ} \cdot \int_a^\beta \frac{1}{x-λ} dx - \frac{κ}{μ-λ} \cdot \int_a^\beta \frac{1}{x-μ} dx = \\ &= \frac{κ}{μ-λ} \cdot \left[\ln \left| \frac{1}{x-λ} \right| \right]_a^\beta - \frac{κ}{μ-λ} \cdot \left[\ln \left| \frac{1}{x-μ} \right| \right]_a^\beta \end{aligned}$$

- $(x-\lambda)-(x-\mu)=\mu-\lambda$
- $\frac{\kappa}{(x-\lambda)(x-\mu)} = \frac{\kappa}{\mu-\lambda} \cdot \frac{(x-\lambda)-(x-\mu)}{(x-\lambda)(x-\mu)} = \frac{\kappa}{\mu-\lambda} \cdot \left[\frac{1}{x-\mu} - \frac{1}{x-\lambda} \right]$

Παράδειγμα 2

$$I = \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+3)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+3)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{2} [\ln(x+1) - \ln(x+3)]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} [\ln(x+1) - \ln(x+3)]_0^2 = \frac{1}{2} [(\ln 3 - \ln 5) - (\ln 1 - \ln 3)] = \frac{1}{2} (2 \ln 3 - \ln 5) = \frac{2 \ln 3 - \ln 5}{2}$$

iv) $I = \int_a^b \frac{P(x)}{x^v} dx$, $P(x)$ πολυώνυμο

Διασπούμε το κλάσμα σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων.

Παράδειγμα 3

$$I = \int_1^2 \frac{x^3 - 3x + 4}{x^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{x^2} - 3 \frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(x - 3 \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3 \ln x - \frac{4}{x} \right]_1^2 = \frac{7}{2} - 3 \ln 2$$

B. Σε κάθε άλλη περίπτωση για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η Περίπτωση βαθμός $P(x) <$ βαθμός $Q(x)$ και $Q'(x) = P(x)$, τότε:

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_a^b \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx = \left[\ln |Q(x)| \right]_a^b = \ln |Q(b)| - \ln |Q(a)|$$

Παράδειγμα 4

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx = \left[\ln |x^2+x+1| \right]_0^1 = [\ln 3 - \ln 1] = \ln 3$$

2η Περίπτωση βαθμός $P(x) <$ βαθμός $Q(x)$ με $Q'(x) \neq P(x)$ και ο παρονομαστής αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων, δηλαδή

$$Q(x) = \beta_\mu (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_\kappa)$$

Τότε αναλύουμε το $\frac{P(x)}{Q(x)}$ σε άθροισμα κ απλούστερων κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \rho_1} + \frac{A_2}{x - \rho_2} + \cdots + \frac{A_\kappa}{x - \rho_\kappa} =$$

$$= \frac{[A_1(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_\kappa)] + [A_2(x - \rho_1) \cdots (x - \rho_\kappa)] + \cdots + [A_\kappa(x - \rho_1) \cdots (x - \rho_{\kappa-1})]}{(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_\kappa)}$$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει

$$P(x) = [A_1(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_\kappa)] + [A_2(x - \rho_1) \cdots (x - \rho_\kappa)] + \cdots + [A_\kappa(x - \rho_1) \cdots (x - \rho_{\kappa-1})]$$

Από την τελευταία ισότητα για $x = \rho_1, x = \rho_2, \dots, x = \rho_\kappa$, βρίσκουμε τις τιμές των $A_1, A_2, \dots, A_\kappa$

$$\text{Οπότε } \int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_\alpha^\beta \left(\frac{A_1}{x - \rho_1} + \frac{A_2}{x - \rho_2} + \cdots + \frac{A_\kappa}{x - \rho_\kappa} \right) dx =$$

$$= A_1 [\ln|x - \rho_1|] + A_2 [\ln|x - \rho_2|] + \cdots + A_\kappa [\ln|x - \rho_\kappa|]$$

Παράδειγμα 5

$$\int_2^3 \frac{1}{x^3 - x} dx = \int_2^3 \left(\frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = \left[-\ln x + \frac{1}{2} \ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_2^3 = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

- Θα βρούμε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x+1} = \frac{\alpha(x-1)(x+1) + \beta x(x+1) + \gamma x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

- Η τελευταία ισότητα ισχύει όταν $\alpha(x-1)(x+1) + \beta x(x+1) + \gamma x(x-1) = 1$

$$\text{Για } x = 1: 2\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Για } x = 0: -\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

$$\text{Για } x = -1: 2\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2}$$

3η Περίπτωση βαθμός $P(x) \geq$ βαθμός $Q(x)$ τότε κάνουμε την ευκλείδεια διαίρεση των πολωνύμων και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$ (Διαιρετέος = διαιρέτης • πηλίκο + υπόλοιπο)

$$\text{Έτσι έχουμε } P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x) \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{Q(x)}$$

$$\text{Οπότε } \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_a^b \pi(x) dx + \int_a^b \frac{\upsilon(x)}{Q(x)} dx$$

Το ολοκλήρωμα $\int_a^b \frac{\upsilon(x)}{Q(x)} dx$ το υπολογίζουμε όπως στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 6

$$\int_2^3 \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x + 4}{x^3 - x} dx$$

Κάνουμε τη διαίρεση $(x^4 + x^3 - x^2 + x + 4) \div (x^3 - x)$ και έχουμε

$$(x^4 + x^3 - x^2 + x + 4) = (x^3 - x)(x + 1) + (2x + 4) \Leftrightarrow \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x + 4}{x^3 - x} = x + 1 + \frac{2x + 4}{x^3 - x}$$

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{2x + 4}{x^3 - x}$ σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων

- Θα βρούμε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{2x + 4}{x^3 - x} = \frac{2x + 4}{x(x-1)(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x+1} = \frac{\alpha(x-1)(x+1) + \beta x(x+1) + \gamma x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

- Η τελευταία ισότητα ισχύει όταν $\alpha(x-1)(x+1) + \beta x(x+1) + \gamma x(x-1) = 2x + 4$

$$\text{Για } x = 1: 2\beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 3$$

$$\text{Για } x = 0: -\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = -4$$

$$\text{Για } x = -1: 2\gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = 1$$

Οπότε

$$\int_2^3 \frac{2x + 4}{x^3 - x} dx = \int_2^3 \left(\frac{-4}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[-4 \ln x + 3 \ln(x-1) + \ln(x+1) \right]_2^3 = 9 \ln 2 - 5 \ln 3$$

Άσκηση 941 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_1^2 \frac{3x^5 - 2x^3 + 4}{x^3} dx$

β) $\int_1^2 \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{x^2} dx$

γ) $\int_0^2 \frac{3x+10}{x^2+6x+8} dx$

Άσκηση 942 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_5^{10} \frac{2-4x}{x^3-2x^2-x+2} dx$

β) $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+6x+8} dx$

γ) $\int_0^2 \frac{x^2+3}{x^2+2} dx$

Άσκηση 943 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_{-1}^0 \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x-2} dx$

β) $\int_{-1}^0 \frac{2x^3-6x^2+5x-3}{x^2-3x+2} dx$

γ) $\int_0^2 \frac{x^2+3}{x^2+2} dx$

Άσκηση 944 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 x^2 \ln(2x+1) dx$

β) $\int_1^2 \frac{\ln(2x-1)}{(x+1)^2} dx$

γ) $\int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$



