

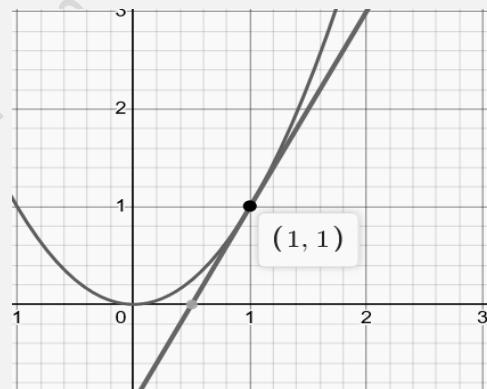
Μάθημα 36 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση**Συμμετρίες και ολοκλήρωση 03/04/2025****36.1. Γραμμικοποίηση**

Πολλές φορές είναι αναγκαίο να μπορούμε να προσεγγίζουμε περίπλοκες συναρτήσεις με άλλες απλούστερες οι οποίες να έχουν όμως την απαιτούμενη ακρίβεια για τις εφαρμογές που μας ενδιαφέρουν.

Οι συναρτήσεις που θα δούμε εδώ ονομάζονται **γραμμικοποιήσεις** και βασίζονται στις εφαπτόμενες ευθείες.

Στο σχήμα (α) η εφαπτομένη $y = 2x - 1$ της καμπύλης $y = x^2$ στο σημείο $(1, 1)$ πλησιάζει την καμπύλη κοντά στο σημείο επαφής.

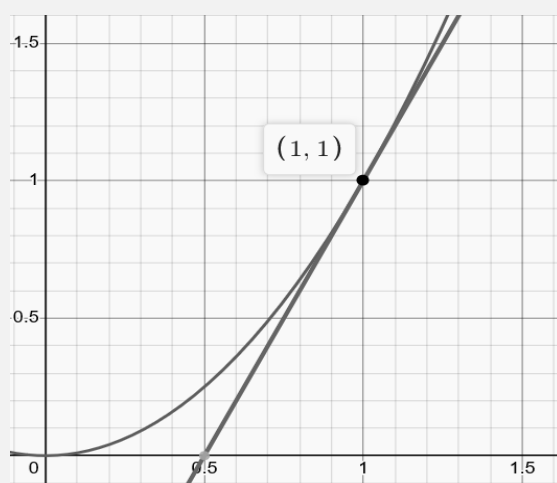
Για κάθε $x \in (1 - dx, 1 + dx)$ όπου dx είναι μια πολύ μικρή μεταβολή του x , οι τεταγμένες των σημείων της εφαπτομένης προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις τεταγμένες των σημείων της συνάρτησης



Σχήμα (α)

Αυτό γίνεται πιο εμφανές όσο μεγεθύνουμε το σχήμα ή εξετάσουμε πίνακες τιμών της κατακόρυφης απόστασης σημείων της καμπύλης και σημείων της εφαπτομένης κοντά στο σημείο επαφής.

Έτσι σε τοπική κλίμακα κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση συμπεριφέρεται ως ευθεία



Σχήμα (β)

Ορισμός

Αν f είναι μια συνάρτηση διαφορίσιμη στο $x = \alpha$ τότε η προσεγγιστική συνάρτηση $L(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$ είναι η γραμμικοποίηση της f στο $x = \alpha$

36.2 Διαφορικό συνάρτησης

Γνωρίζουμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ εκτός από τον συμβολισμό $f'(x)$

συμβολίζεται επίσης με $\frac{dy}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx}$ (Leibnitz), δηλαδή $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Το γινόμενο $f'(x)dx$ ονομάζεται διαφορικό της $f(x)$ όπου dx είναι μια τυχαία μεταβολή του x .

Το διαφορικό της $f(x)$ συμβολίζεται με $df(x)$, έτσι έχουμε $df(x) = f'(x)dx$

Παράδειγμα 1

α) Αν $f(x) = x^3 + 2x$ τότε $df(x) = (x^3 + 2x)' dx = (3x^2 + 2)dx$

β) Αν $f(\theta) = \sin 2\theta$ τότε $df(\theta) = (\sin 2\theta)' d\theta = (2\cos 2\theta)d\theta$

γ) Αν $x = u^3$ τότε $dx = d(u^3) \Rightarrow dx = (u^3)' du \Rightarrow dx = 3u^2 du$

δ) Αν $x^2 = u^3$ τότε $d(x^2) = d(u^3) \Rightarrow (x^2)' dx = (u^3)' du \Rightarrow 2x dx = 3u^2 du$

Γεωμετρική Ερμηνεία

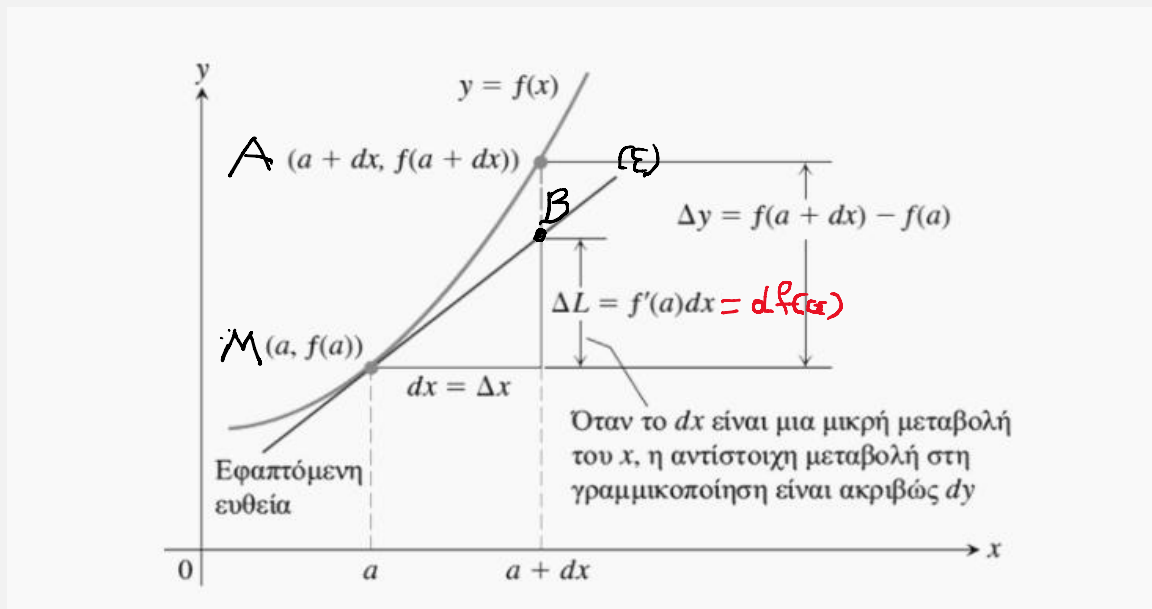
Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο $x = \alpha$ και $dx + \alpha = \Delta x \neq 0$ μια οποιαδήποτε μεταβολή του x .

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση

(ε): $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

Όταν $dx \rightarrow 0$ η διαφορά $\Delta f(\alpha) = f(\alpha + dx) - f(\alpha)$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από το διαφορικό $df(\alpha) = f'(\alpha) \cdot dx$, δηλαδή $\Delta f(\alpha) \approx f'(\alpha) \cdot dx = df(\alpha)$

Όπως είπαμε προηγουμένως, μπορούμε να αντικαθιστούμε με ικανοποιητική προσέγγιση κάθε τμήμα της AM της C_f , όπου $M(a, f(a))$ και $A(a+dx, f(a+dx))$ με το ευθύγραμμο τμήμα BM της εφαπτομένης (ε): $y - f(a) = f'(a)(x - a)$



36.3 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που είναι ή μπορούν να γραφτούν στη μορφή $I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ με f, g' συνεχείς συναρτήσεις.

Θέτουμε $g(x) = u \Rightarrow g'(x) dx = u' du \Rightarrow g'(x) dx = du$, και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du, \text{ όπου } g(a) = u_1, g(b) = u_2.$$

Αντιστρόφως

Στο ολοκλήρωμα $I = \int_a^b f(x) \cdot dx$ μπορούμε να θέσουμε $x = g(u)$, με g όμως 1-1 και έχουμε $x = g(u) \Rightarrow (x)' dx = g'(u) du \Rightarrow dx = g'(u) du$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u)) \cdot g'(u) du$$

Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα με την μέθοδο αυτή:

- 1^ο Εντοπίζουμε την συνάρτηση $f(g(x))$
- 2^ο Θέτουμε $g(x) = u \Rightarrow g'(x) dx = du$
- 3^ο Βρίσκουμε τα νέα άκρα ολοκλήρωσης
- 4^ο Δημιουργούμε την παράσταση $g'(x) dx$ (αν είναι δυνατόν) στο ολοκλήρωμα
- 5^ο Υπολογίζουμε το νέο ολοκλήρωμα

36.4 Βασικές Αντικαταστάσεις

Ολοκλήρωμα	Αντικατάσταση	Διαφορικό	
$\int_{x_1}^{x_2} f(\alpha x + \beta) dx$	$\alpha x + \beta = u$	$\alpha dx = du$	
$\int_{x_1}^{x_2} (x - \alpha)^v (x - \beta)^k dx, v \geq k$	$x - \alpha = u$	$\alpha dx = du$	
$\int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt[v]{\alpha x + \beta}) dx$	$\sqrt[v]{\alpha x + \beta} = u \Leftrightarrow \alpha x + \beta = u^v$	$\alpha dx = v u^{v-1} du$	
$\int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt[\lambda]{\alpha x + \beta}, \sqrt[\mu]{\alpha x + \beta}) dx$	$\sqrt[\lambda]{\alpha x + \beta} = u \Leftrightarrow \alpha x + \beta = u^\lambda$ $\lambda = \text{Ε.Κ.Π.}(v, \mu)$	$\alpha dx = \lambda u^{\lambda-1} du$	
$\int_{x_1}^{x_2} f(e^x) dx$	$e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u$	$e^x dx = du$	
$\int_{x_1}^{x_2} f(\eta \mu x) dx$	$\eta \mu x = u$	$\sigma \nu x dx = du$	
$\int_{x_1}^{x_2} \frac{P(x)}{(\alpha x + \beta)^v} dx, v \in \mathbb{Z}$	$\alpha x + \beta = u$	$\alpha dx = du$	

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (x+1)^3 (1-3x) dx$

Λύση

Θέτουμε $x+1 = u \Rightarrow (x+1)' dx = u' du \Rightarrow dx = du$ και $x = u-1$

Για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=2$

Οπότε

$$I = \int_1^2 u^3 [1 - 3(u-1)] du = \int_1^2 u^3 (4 - 3u) du = \int_1^2 (4u^3 - 3u^4) du = \left[u^4 - 3 \frac{u^5}{5} \right]_1^2 = \dots$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^6 x\sqrt{x-2} dx$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x-2} = u \Rightarrow x-2 = u^2 \Rightarrow dx = 2u du$ και $x = u^2 + 2$

Για $x=2$ είναι $u=0$ και για $x=6$ είναι $u=2$

Οπότε

$$I = \int_0^2 u(u^2 + 2) \cdot 2u du = 2 \int_0^2 (u^4 + 2u^2) du = 2 \left[\frac{u^5}{5} + 2 \frac{u^3}{3} \right]_0^2 = \dots$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt[6]{x} = u \Rightarrow x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5 du$

Για $x=1$ είναι $u=1$ και για $x=64$ είναι $u=2$

Οπότε

$$I = \int_1^2 \frac{6u^5}{u^3 + u^2} du = 6 \int_1^2 \frac{u^3}{u+1} du = 6 \int_1^2 \frac{(u^3 + 1) - 1}{u+1} du = 6 \int_1^2 \left[\frac{(u+1)(u^2 - u + 1)}{u+1} - \frac{1}{u+1} \right] du =$$

$$6 \int_1^2 \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1} \right) du = 6 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln(u+1) \right]_1^2 = \dots$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^2 \frac{x^2}{(2x-1)^4} dx$

Λύση

Θέτουμε $2x-1=u \Rightarrow 2dx=du$ και $x=\frac{u+1}{2}$

Για $x=1$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=3$

Οπότε

$$I = \frac{1}{16} \int_1^3 \frac{(u+1)^2}{u^4} du = \frac{1}{16} \int_1^3 \frac{u^2+2u+1}{u^4} du = \frac{1}{16} \int_1^3 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u^3} + \frac{1}{u^4} \right) du = \frac{1}{16} \left[-\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3} \right]_1^3 = \dots$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{2e^{2x} - 3e^x + 1}{e^x} dx$

Λύση

Θέτουμε $e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$ και $x = \ln u$

Για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=e$

Οπότε

$$I = \int_1^e \frac{2u^2 - 3u + 1}{u} \cdot \frac{1}{u} du = \int_1^e \frac{2u^2 - 3u + 1}{u^2} du = \int_1^e \left(2 - \frac{3}{u} + \frac{1}{u^2} \right) du = \left[2u - 3 \ln u - \frac{1}{u} \right]_1^e = \dots$$

Άσκηση 945 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^1 f(x+3) dx = \int_3^4 f(x) dx \quad \beta) \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx \quad \gamma) \int_0^1 f(2x+3) dx = \frac{1}{2} \int_3^5 f(x) dx$$

Άσκηση 946 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^x f(2x-u) du = \int_x^{2x} f(u) du \quad \beta) \int_x^{x^2} f\left(\frac{u}{x}\right) du = x \cdot \int_1^x f(u) du$$

$$\gamma) \int_x^{x/2} f\left(\frac{x}{u}\right) du = -x \cdot \int_1^2 \frac{f(u)}{u^2} du$$

Άσκηση 947

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι: } \int_0^3 f(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x) dx$$

$\beta)$ Έστω ότι $4 \int_0^3 f(2x+1) dx = \int_1^7 f(x) dx + 2024$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (1,7) \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = \frac{1012}{3}$$

Άσκηση 948 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

β) $\int_0^1 x(1-x)^3 dx$

γ) $\int_1^3 \frac{x}{(1-2x)^3} dx$

Άσκηση 949 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^3 x^2 \sqrt{x+1} dx$

β) $\int_1^{\sqrt{6}} x \sqrt{x^2+3} dx$

γ) $\int_1^6 \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} dx$

Άσκηση 950 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^1 \frac{2e^x}{\sqrt{2e^x-1}} dx$

β) $\int_1^3 \frac{e^{\sqrt{x+1}}-1}{\sqrt{x+1}} dx$

γ) $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x \sqrt{\ln^2 x + 1}} dx$

Άσκηση 951 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\int_{-1}^{e-2} \frac{\ln(x+2)}{(x+2)^2} dx$

β) $\int_1^2 \frac{2e^x+1}{e^{2x}-3e^x+2} dx$

γ) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x - 4} dx$

Άσκηση 952 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

α) $\int_1^e \sin(\ln x) dx$

β) $\int_0^{\pi/4} \eta \mu \sqrt{x} dx$

γ) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+3x^4+2} dx$

36.5 Βασικές «πονηρές» αντικαταστάσεις

Πολλές φορές τα άκρα ολοκλήρωσης μας οδηγούν σε «πονηρές» αλλαγές μεταβλητής, στις οποίες δεν αλλάζουν τα άκρα ολοκλήρωσης.

i) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ επιλέγω $u = \alpha + \beta - x$

ii) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$ επιλέγω $u = -x$

iii) $\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} f(x) dx$ επιλέγω $u = \frac{1}{x}$

Άσκηση 953 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

α) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} x \eta \mu x dx$

β) $\int_0^{\pi} \ln(1 + \epsilon \phi x) dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + \eta \mu x}{1 + \sigma \upsilon \nu x}\right) dx$

36.6 Ολοκλήρωμα άρτιας - περιττής - περιοδικής συνάρτησης

A. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$

α) Αν η f είναι άρτια να αποδειχθεί ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$

β) Αν η f είναι περιττή να αποδειχθεί ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(-x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx \quad (1)$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{-\alpha}^0 f(-x) dx$, θέτουμε $-x = u \Rightarrow -dx = du$

Για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$ και για $x = 0 \Rightarrow u = 0$, άρα

$$\int_{-\alpha}^0 f(-x) dx = \int_{\alpha}^0 f(u) (-du) = \int_0^{\alpha} f(u) du = \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

Οπότε η (1) γράφεται $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$

$$\beta) \text{ Είναι } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(-x) (-dx) + \int_0^{\alpha} f(x) dx \quad (2)$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{-\alpha}^0 f(-x) (-dx)$, θέτουμε $-x = u \Rightarrow -dx = du$

Για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$ και για $x = 0 \Rightarrow u = 0$, άρα

$$\int_{-\alpha}^0 f(-x) (-dx) = \int_{\alpha}^0 f(u) (du) = -\int_0^{\alpha} f(u) du = -\int_0^{\alpha} f(x) dx$$

Οπότε η (2) γράφεται $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = -\int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = 0$

B. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο T , να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

Λύση

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } f(x+T) = f(x) \text{ και } \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx = \int_{\alpha}^T f(x) dx + \int_T^{\alpha+T} f(x) dx \quad (3)$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_T^{\alpha+T} f(x) dx$, θέτουμε $x = u + T \Rightarrow dx = du$

Για $x = T \Rightarrow u = 0$ και για $x = \alpha + T \Rightarrow u = \alpha$, άρα

$$\int_T^{\alpha+T} f(x) dx = \int_0^\alpha f(u) du = \int_0^\alpha f(x) dx$$

Οπότε η (3) γράφεται $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x) dx = \int_\alpha^T f(x) dx + \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

Παράδειγμα 6

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^2 \frac{x^4(e^x - 1)}{e^x + 1} dx$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4(e^x - 1)}{e^x + 1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με

$$f(-x) = \frac{(-x)^4(e^{-x} - 1)}{e^{-x} + 1} = \frac{x^4(1 - e^x)}{1 + e^x} = -f(x), \text{ άρα περιττή.}$$

$$\text{Οπότε } I = \int_{-2}^2 \frac{x^4(e^x - 1)}{e^x + 1} dx = 0$$

Άσκηση 954

α) Αν η συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια, να αποδείξετε ότι

$$(i) \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x f(x)}{e^x + 1} dx \quad (ii) \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^1 f(x) dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x}{e^x + 1} dx$

Άσκηση 955

Έστω η συνεχής και περιττή συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν $\beta \in [-\alpha, \alpha]$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \int_\beta^x f(t) dt, x \in [-\alpha, \alpha]$ είναι άρτια.

36.7 Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

Ζητείται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx$

- Αν ξέρουμε ή μπορούμε να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης, αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα με ένα από τους προηγούμενους τρόπους.
- Αν δεν είναι γνωστός ο τύπος της αντίστροφης θέτουμε

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y) dy$$

$$\text{Για } x = \alpha \Rightarrow \alpha = f(y) \Leftrightarrow f(x_1) = f(y) \Leftrightarrow y = x_1 \text{ και}$$

$$\text{Για } x = \beta \Rightarrow \beta = f(y) \Leftrightarrow f(x_2) = f(y) \Leftrightarrow y = x_2$$

- Οπότε $I = \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f^{-1}(f(y)) f'(y) dy = \int_{x_1}^{x_2} y f'(y) dy$
- Το ολοκλήρωμα $J = \int_{x_1}^{x_2} y f'(y) dy$ μπορούμε να το υπολογίσουμε είτε με κάνοντας τις πράξεις είτε με παραγοντική ολοκλήρωση.

Παράδειγμα 7

Αν $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f^{-1}(x) dx$, με f^{-1} συνεχή.

Λύση

Αφού $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + (x+1)^2 > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι αντιστρέψιμη.

$$\text{Θέτουμε } y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y) dy$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow 1 = f(y) \Leftrightarrow f(0) = f(y) \Leftrightarrow y = 0 \text{ και}$$

$$\text{για } x = 4 \Rightarrow 4 = f(y) \Leftrightarrow f(1) = f(y) \Leftrightarrow y = 1$$

$$\text{Οπότε } I = \int_0^1 y f'(y) dy = \int_0^1 y (3y^2 + 2y + 1) dy = \int_0^1 (3y^3 + 2y^2 + y) dy =$$

$$= \left[3 \frac{y^4}{4} + 2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{23}{12}$$

Παράδειγμα 8

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, 1-1 με f και f^{-1} συνεχείς.

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(x) dx$

Λύση

Θέτουμε $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y) dy$

Για $x = \alpha \Rightarrow \alpha = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(\alpha)$ και

για $x = \beta \Rightarrow \beta = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(\beta)$

Οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} y f'(y) dy = [y f(y)]_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(y) dy = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(x) dx$$

Άσκηση 955

Αν $f(x) = x^3 - x^2 + x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f^{-1}(x) dx$, με f^{-1} συνεχή.

Άσκηση 957

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να ορίσετε την f^{-1}

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Άσκηση 958

Αν $f(x) = x - \eta \mu x \cdot \sigma \nu x$ και $\alpha > 0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f^{-1}(x) dx$, με f^{-1} συνεχή.

36.8 Ολοκλήρωμα και συναρτησιακές σχέσεις

- Έχουμε σχέση της μορφής $f(x) + \kappa \cdot f(g(x)) = h(x)$ (1)
- Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- Από την (1) έχουμε $f(x) = h(x) - \kappa \cdot f(g(x))$, οπότε

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} [h(x) - \kappa \cdot f(g(x))] dx = \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx - \kappa \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) dx$$
- Υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με αλλαγή μεταβλητής

Παράδειγμα 9

Έστω συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2-x) + f(2+x) = 1$ (1) για κάθε $x \in [-2, 2]$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 f(x) dx$

Λύση

Θέτουμε $y = 2 - x$ και η (1) γράφεται $f(y) + f(4 - y) = 1 \Leftrightarrow f(y) = 1 - f(4 - y)$ ή

$$f(x) = 1 - f(4 - x) \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } I = \int_0^4 f(x) dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^4 [1 - f(4 - x)] dx = \int_0^4 dx - \int_0^4 f(4 - x) dx = 4 - \int_0^4 f(4 - x) dx$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, θέτουμε $u = 4 - x \Rightarrow du = -dx$ και για $x = 0 \Rightarrow u = 4$,

$$x = 4 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Επομένως } I = 4 - \int_0^4 f(4 - x) dx = 4 - \int_4^0 f(u)(-du) = 4 - \int_0^4 f(u) du, \text{ άρα}$$

$$I = 4 - I \Leftrightarrow 2I = 4 \Leftrightarrow I = 2$$

Άσκηση 959

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{1 + e^x}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) + f(-x) = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

Άσκηση 960

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x \sin y + y \sin x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 2x \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$.

Άσκηση 961

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και τέτοια ώστε:

$$\alpha) f'(x) - f(x) = f^2(x) \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

$$\beta) f(1) - 2f(0) = 1, f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$.

36.9 Συμμετρίες και Ολοκλήρωση

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων που είχαν βασική «ιδέα» την «αντιπαράγωγίση», δηλαδή την εύρεση μιας αρχικής συνάρτησης.

Έτσι μετά από τους απλούς τρόπους ολοκλήρωσης δυνάμεων, τριγωνομετρικών συναρτήσεων, εκθετικών, λογαριθμικών, ρητών συναρτήσεων ασχοληθήκαμε με τις βασικές μεθόδους ολοκλήρωσης:

- Ολοκλήρωση κατά παράγοντας
- Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Όπως θα δούμε και παρακάτω, υπάρχουν πολλά παραδείγματα, στα οποία η εφαρμογή των βασικών μεθόδων δεν είναι και η καλύτερη μέθοδος για τον υπολογισμό τους.

Είδαμε πως υπολογίζονται τα ολοκληρώματα των άρτιων περιττών συναρτήσεων και περιοδικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας την συμμετρία

Ο σκοπός μας στη συνέχεια είναι να επεκτείνουμε τη συμμετρία στην αντιμετώπιση διαφορών προβλημάτων

Πρόταση 1.

Η μέθοδος της συμμετρίας βασίζεται στο γεγονός ότι για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

$$\bullet \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha f(\alpha - x) dx \quad (1)$$

$$\bullet \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(\alpha - x) dx + \int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x) dx \quad (2)$$

$$\bullet \int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} f(\alpha - x) dx \quad (3)$$

Από την (2) προκύπτει ότι:

$$\bullet \text{ Αν } f(\alpha - x) = f(x), \text{ τότε } \int_0^{\alpha} f(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x) dx \quad (4)$$

$$\bullet \text{ Αν } f(\alpha - x) = -f(x), \text{ τότε } \int_0^{\alpha} f(x) dx = 0 \quad (5)$$

Γενικότερα ισχύει:

$$\bullet \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx \quad (6)$$

και αν ακόμα $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε

$$\bullet \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (7)$$

$$\bullet \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx \quad \text{και}$$

$$\bullet \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx \quad (8)$$

Σε πολλές περιπτώσεις εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι, συχνά είναι ευκολότερο να βρούμε το ολοκλήρωμα της g , όπου $g(x) = f(x) + f(\alpha - x)$ από το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης f .

Αυτό συμβαίνει παραδείγματος χάριν, όταν η g είναι σταθερή ή άλλη συνάρτηση με γνωστό ολοκλήρωμα.

Πράγματι, αν $g(x) = f(x) + f(\alpha - x) = k$ ή $\int_0^{\alpha} g(x) dx = k$ τότε από την σχέση (2) έχουμε:

$$\bullet \int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} g(x) dx = \frac{k \cdot \alpha}{2} \quad (9)$$

Παράδειγμα 10

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

$$(\alpha) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \, dx \quad (\beta) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \epsilon \phi x) \, dx \quad (\gamma) \quad I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + e^{\eta \mu x}} \, dx$$

Λύση

$$(\alpha) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \, dx$$

$$\text{Αν } f(x) = \eta \mu^2 x \text{ τότε } g(x) = f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta \mu^2 x + \eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x = 1.$$

$$\text{Οπότε } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(\beta) \quad \text{Για την συνάρτηση } f(x) = \ln(1 + \epsilon \phi x) \text{ έχουμε}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln(1 + \epsilon \phi x) + \ln\left(1 + \epsilon \phi \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \\ &= \ln(1 + \epsilon \phi x) + \ln\left(1 + \frac{1 - \epsilon \phi x}{1 + \epsilon \phi x}\right) = \ln(1 + \epsilon \phi x) + \ln\left(\frac{2}{1 + \epsilon \phi x}\right) = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 \, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

$$(\gamma) \quad I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + e^{\eta \mu x}} \, dx$$

$$\text{Για τη συνάρτηση } f(x) = \frac{1}{1 + e^{\eta \mu x}} \text{ ισχύει } f(x) + f(2\pi - x) = 1 \text{ οπότε } I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 \cdot dx = \pi.$$

Πρόταση 2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

$$f(x) + f(\alpha + \beta - x) = k \text{ (σταθερό)}, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \quad * \quad \text{τότε}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)[f(\alpha) + f(\beta)] \quad (10)$$

Για $x = \alpha$ είναι $f(\alpha) + f(\beta) = k$ και για $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{k}{2}$,

άρα η δεύτερη ισότητα στη σχέση (10) είναι προφανής.

Αν θέσουμε στην $\alpha + \beta - x = u$ θα πάρουμε $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = k(\beta - \alpha)$, και η σχέση αποδείχτηκε.

Άσκηση 962

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\kappa - \beta}^{\kappa - \alpha} f(\kappa - x) dx \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx$$

$$\gamma) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) \int_0^1 f(\alpha + (\beta - \alpha)x) dx$$

Άσκηση 963

α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma \nu x) dx.$$

$$\beta) \text{ Να αποδειχθεί ότι: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{\eta \mu x + \sigma \nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \nu x}{\eta \mu x + \sigma \nu x} dx = \frac{\pi}{4}$$

Άσκηση 964

α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Να αποδειχθεί ότι:

$$i) \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

$$ii) \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta \mu x) dx$$

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$i) I_1 = \int_0^{\pi} \frac{x \eta \mu x}{1 + \sigma \nu^2 x} dx \quad ii) I_2 = \int_0^{\pi} x \eta \mu^4 x dx$$

$$iii) I_3 = \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} x \cdot \eta \mu x \cdot \sigma \nu^6 x dx \quad iv) I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\epsilon \phi x) dx$$

Άσκηση 965

α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^{2\pi} x f(\sin x) dx = \pi \cdot \int_0^{2\pi} f(\sin x) dx .$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx$

Άσκηση 966

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \left(1 + e^{\frac{\pi}{2}}\right)$. Να αποδειχθεί ότι

υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = e^{\xi} \cdot \eta \mu \xi$.

