

Μάθημα 4 Ισότητα – Πράξεις Συναρτήσεων

18/9/2024

Ισότητα:

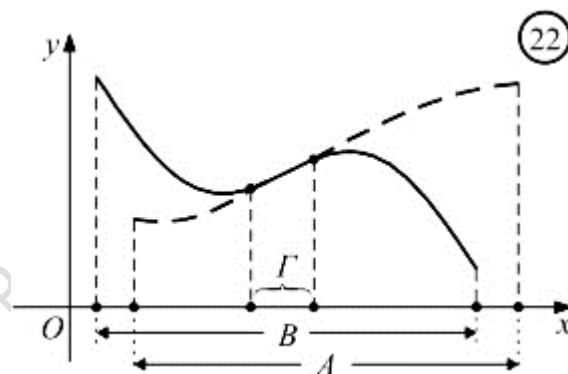
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$

Έστω δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα και Γ ένα υποσύνολο των A και B .

Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$ τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .

**Παραδείγματα.**

α) Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ και $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$ έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $A = \mathbb{R} - \{2\}$ και $B = \mathbb{R} - \{0\}$ αντίστοιχα, άρα δεν είναι ίσες.

Είναι όμως ίσες στο σύνολο $\Gamma = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, αφού για κάθε $x \in \Gamma = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, ισχύει

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x)$$

β) Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$ δεν είναι ίσες διότι $D_f = \mathbb{R}^*$ και $D_g = (0, +\infty)$.

Οι συναρτήσεις όμως $f(x) = \ln x^2$ και $h(x) = 2\ln|x|$ είναι ίσες, διότι $D_f = \mathbb{R}^* = D_h$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = \ln x^2 = \ln|x|^2 = 2\ln|x| = h(x)$

γ) Να προσέξουμε ότι $f(x) = \sqrt[2v+1]{x^{2\mu}} \neq x^{\frac{2\mu}{2v+1}}$, άλλα

$$f(x) = \sqrt[2v+1]{x^{2\mu}} = |x|^{\frac{2\mu}{2v+1}} = \begin{cases} x^{\frac{2\mu}{2v+1}}, & x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2\mu}{2v+1}}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{και } \ln x^{2v} = \ln|x|^{2v} = 2v\ln|x| = \begin{cases} 2v\ln x, & x > 0 \\ 2v\ln(-x), & x < 0 \end{cases} \text{ με } \mu, v \in \mathbb{N}^*$$

δ) Να προσέξουμε ότι ο ισχυρισμός « Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες όταν έχουν τον ίδιο τύπο και το ίδιο πεδίο ορισμού είναι ίσες » είναι λάθος.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = |x|$ με πεδίο ορισμού το $A = \{-1, 0, 1\}$ είναι ίσες αλλά δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

2. Άθροισμα – Διαφορά – Γινόμενο – Πηλίκο:

Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού τα σύνολα A και B αντίστοιχα με $A \cap B \neq \emptyset$.

	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ	ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ	ΤΥΠΟΣ
ΑΘΡΟΙΣΜΑ	$f + g$	$A \cap B$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
ΔΙΑΦΟΡΑ	$f - g$	$A \cap B$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
ΓΙΝΟΜΕΝΟ	$f \cdot g$	$A \cap B$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
ΠΗΛΙΚΟ	$\frac{f}{g}$	$A \cap B - \{x \in B / g(x) = 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	$\lambda \cdot f$	A	$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

Σχόλια 4:

1. Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε δεν ορίζεται καμιά πράξη.
2. Στις πράξεις με συναρτήσεις (και όχι μόνο) θα βρίσκουμε **πρώτα** το πεδίο ορισμού και μετά τον τύπο.
3. Γνωρίζουμε ότι: $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Στις συναρτήσεις η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει, δηλαδή αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ με $x \in A$ δεν συνεπάγεται υποχρεωτικά ότι $f(x) = 0$ για $x \in A$ ή $g(x) = 0$ για $x \in A$.

Για παράδειγμα αν: $f(x) = x - |x|$ και $g(x) = x + |x|$ τότε έχουμε:

$$f(x) \cdot g(x) = (x - |x|) \cdot (x + |x|) = x^2 - |x|^2 = 0 \text{ δηλαδή } f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Όμως δεν ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Τι ισχύει;

Ισχύει ότι $f(x) = 0$ για κάποια $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 0$ για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή είναι σωστό να γράψουμε $f(x) \cdot g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (f(x) = 0 \text{ ή } g(x) = 0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Το αντίστροφο προφανώς ισχύει, αν δηλαδή $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ τότε $f(x) \cdot g(x) = 0$.

4. Γνωρίζουμε επίσης ότι: $\alpha^2 = \beta^2 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Στις συναρτήσεις η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει

Πράγματι αν:

$$f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) - g(x)] \cdot [f(x) + g(x)] = 0 \text{ τότε με βάση το προηγούμενο σχόλιο δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι}$$

$$f(x) - g(x) = 0, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = g(x), x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) + g(x) = 0, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = -g(x), x \in \mathbb{R}.$$

5. Ισχύει όμως: $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ και $f^v(x) = g^v(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ με v περιττό

Άσκηση 43.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(f(x)-1)(f(x)-2)=0, x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 44. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x) - 4f(x) - x^2 + 4x = 0, x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 45. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$ και $g(x) = \ln|x|$ είναι ίσες.

Άσκηση 46.

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$.

Στις περιπτώσεις που ισχύει $f \neq g$, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$

$$\alpha) f(x) = x^{\frac{2}{3}} \text{ και } g(x) = \sqrt[3]{x^2} \qquad \beta) f(x) = \ln(x^2 - x) \text{ και } g(x) = \ln x + \ln(x-1)$$

4.9.1. Προσδιορισμός παραμέτρων ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις.

- Βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων ώστε να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού
- Για τις τιμές που βρήκαμε εξετάζουμε αν οι συναρτήσεις έχουν ίσες τιμές

Άσκηση 47.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2\lambda^2 x + \lambda}{x + 1 - \lambda}$ και

$$g(x) = \frac{(3\lambda - 1)x + \lambda}{x + \lambda} \text{ είναι ίσες.}$$

β) Ομοίως για τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{(\lambda - 2)x^2 + 2x + \lambda}{x - 2\lambda^2 + \lambda - 2}$ και $g(x) = \frac{-\lambda x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda}{x - \lambda^2 - 2\lambda}$

Άσκηση 48.

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x| + 3} \text{ και } g(x) = |x| - 3$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3|x|} \text{ και } g(x) = 1 - \frac{3}{|x|}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} - 2} \text{ και } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

Ασκηση 49.

Ναδειχθεί ότι είναι ίσες οι συναρτήσεις, όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) 2[f^2(x) + g^2(x)] = [f(x) + g(x)]^2$$

$$\beta) f(x)[f(x) - g(x)] + g(x)[g(x) - h(x)] + h(x)[h(x) - f(x)] = 0$$

$$\gamma) [f(x) + g(x)] \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} \right) = 4 \text{ με } f(x) \cdot g(x) \neq 0$$

Ασκηση 50.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x - \sqrt{x}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις

$$f + g, f - g, fg \text{ και } \frac{f}{g}.$$

Ασκηση 51.

Να βρείτε το πηλίκο των συναρτήσεων

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & , x \leq 0 \\ \ln x - 1 & , x > 0 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ x - 1 & , x > 0 \end{cases}.$$

4.10. Σταθερή συνάρτηση

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, θα λέμε ότι είναι σταθερή αν:

- $f(x) = c$ για κάθε $x \in A$ ή
- $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$

A. Απόδειξη σταθερής συνάρτησης από τον τύπο της συνάρτησης

- Εκτελούμε τις πράξεις

- Πρέπει να βρούμε αποτέλεσμα αριθμό ή παράσταση **ανεξάρτητη** του x .

B. Απόδειξη σταθερής συνάρτησης από δοθείσα σχέση ισότητας ή ανισότητας.

- Εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε παράσταση με $f(x), g(x)$
- Θέτουμε για ευκολία $f(x) = \alpha$ και $g(x) = \beta$
- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
- Μετασχηματίζουμε το πρώτο μέλος στη μορφή $(\alpha - \kappa)^2 + (\beta - \lambda)^2 = 0$ ή $(\alpha - \kappa)^2 + (\beta - \lambda)^2 \leq 0$ οπότε $\alpha = \kappa$ και $\beta = \lambda$

Άσκηση 52. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$2f^2(x) + g^2(x) \leq 2(f \cdot g)(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι είναι μηδενικές

Άσκηση 53.

Να αποδειχτεί ότι είναι σταθερές οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \frac{x-1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-1}$$

$$\beta) f(x) = \frac{2\eta\mu 2x + \eta\mu 4x}{\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{3\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{x}}{3\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{x}}{3\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{x}} - \frac{24\sqrt{\alpha x}}{9\alpha - 4x}, \alpha > 0$$

$$\delta) \text{ Αν } f(1) = 2 \text{ και } f^2(x) + f^2(y) \leq 2f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 54.

Να αποδειχτεί ότι είναι σταθερές οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) (f+g)(x) [(f+g)(x) - 10] \leq 2[(f \cdot g)(x) - 25], x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) [(f+g)(x)]^2 - 4(f-g)(x) = 2[(f \cdot g)(x) - 4], x \in \mathbb{R}$$

4.11 Εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης σε γεωμετρικά προβλήματα.

- Κατασκευάζουμε το σχήμα
- Σημειώνουμε τα σταθερά μεγέθη με μικρά γράμματα α, β, γ ή αριθμούς και το μεταβλητό μέγεθος x και θέτουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς ώστε το γεωμετρικό πρόβλημα να έχει νόημα.
- Βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των σταθερών μεγεθών και του x κάνοντας χρήση:
 - i) Γεωμετρικών τύπων (εμβαδά, όγκους)
 - ii) Θεωρημάτων (Πυθαγόρειο, Θαλή)
 - iii) Ιδιοτήτων (όμοια τρίγωνα, αναλογίες, ισότητες)

Άσκηση 55.

Ένα κομμάτι σύρμα μήκους 100cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και y cm. Με το πρώτο κομμάτι κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο κύκλο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει του x .

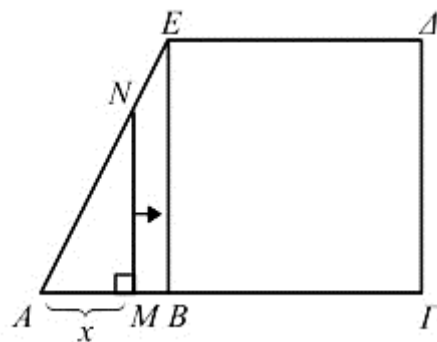
Άσκηση 56.

Δύο σημεία A και B κινούνται πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, ώστε να σχηματίζουν με το σημείο $\Gamma(2,1)$ τρίγωνο ορθογώνιο στο Γ .

Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της τετμημένης του σημείου

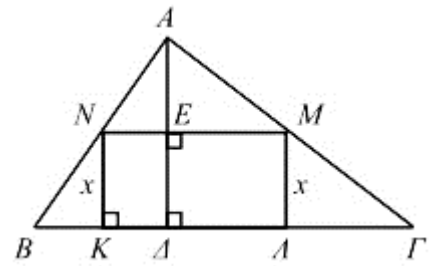
Άσκηση 57.

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB=1$, $AG=3$ και $\Gamma\Delta=2$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x=AM$, όταν το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AG .



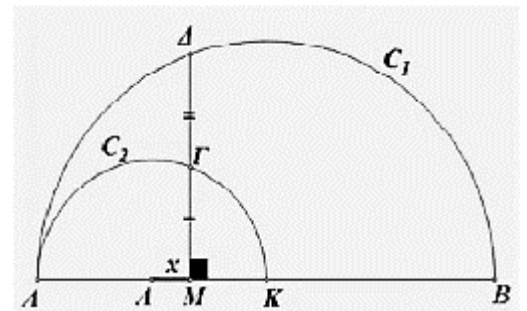
Άσκηση 58.

Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $ΒΓ = 10$ cm και ύψους $ΑΔ = 5$ cm. Να εκφράσετε το εμβαδό E και την περίμετρο P του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .

**Άσκηση 59.**

Στο διπλανό σχήμα τα C_1 και C_2 είναι ημικύκλια με κέντρα Κ και Λ και ακτίνες $R_1 = 6$ cm και $R_2 = 3$ cm αντιστοίχως, ενώ το Μ είναι ένα σημείο της διακέντρου ΚΛ και η ΜΔ είναι κάθετη στην ΚΛ.

Να βρείτε το μήκος x του τμήματος ΛΜ, αν γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ είναι μέσο του ΜΔ.

**Άσκηση 60.**

Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(0,4)$ και $B(2,2)$ καθώς και το σημείο $M(x,0)$ που κινείται κατά μήκος του άξονα $x'x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ στο οποίο τέμνει η ευθεία ΑΒ τον άξονα $x'x$.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ συναρτήσει της τετμημένης x του σημείου Μ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

Άσκηση 61.

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου αυτού.

