

Μάθημα 8

Συναρτήσεις "1-1"

04/10/2024

8.1 Η συνάρτηση "1-1"

1. Ορισμός: Η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται «ένα προς ένα» ("1-1") ή αμφιμονοσήμαντη, αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

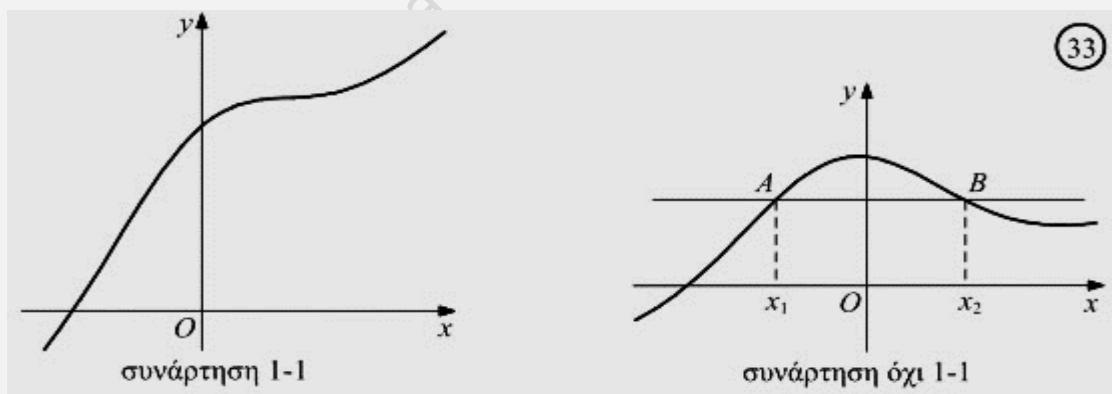
αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα, αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$

Παρατηρήσεις:

1). Από τον ορισμό συναγάγουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι "1-1" αν και μόνο αν υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Για παράδειγμα για την συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ έχουμε $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ και $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

2). Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης C_f διαπιστώνουμε ότι μία συνάρτηση είναι "1-1", όταν κάθε ευθεία παράλληλη στον x' τέμνει τη C_f σε ένα σημείο το πολύ.



3). Αν $a \in f(A)$ και η f είναι "1-1", τότε η εξίσωση $f(x) = a$, έχει μία ακριβώς ρίζα.

4). Αν η f είναι "1-1" τότε ισχύει: $f(g(x)) = f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$

5). Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και "1-1".

Το αντίστροφο δεν ισχύει:

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ είναι "1-1", αλλά δεν είναι γνήσια μονότονη

6). Ισχύει όμως το **αντιθετοαντίστροφο**:

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι "1-1", τότε δεν είναι «γνησίως μονότονη»

7). Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένωση διαστημάτων, $D_f = \Delta_1 \cup \Delta_2$, τότε για να είναι η συνάρτηση f "1-1" στο D_f αρκεί να είναι "1-1" στο Δ_1 , "1-1" στο Δ_2 και τα σύνολα τιμών $f(\Delta_1)$ και $f(\Delta_2)$ να μην έχουν κοινά στοιχεία.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ 3x+4, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι "1-1" σε κάθε ένα από τα

διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, 1)$, $\Delta_2 = [1, +\infty)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από αυτά.

Και αφού $f(\Delta_1) = (-\infty, 3)$ και $f(\Delta_2) = [7, +\infty)$ με $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \emptyset$ θα είναι "1-1" σε όλο το $\mathbb{R}$

8). Να την ξέρεις σαν **Θεώρημα**

α) Αν η συνάρτηση $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε και η $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1"

β) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι "1-1", να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι επίσης "1-1".

8.1.1 Πώς αποδεικνύουμε ότι μια συνάρτηση f είναι "1-1".

1ος τρόπος: Αποδεικνύουμε ότι από την ισότητα $f(x_1) = f(x_2)$ προκύπτει ότι $x_1 = x_2$ μόνο.

• Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x}$ είναι "1-1" στο $A = [0, +\infty)$ αφού για κάθε $x_1, x_2 \in A = [0, +\infty)$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \sqrt{x_1} = x_2 \sqrt{x_2} \Rightarrow (x_1 \sqrt{x_1})^2 = (x_2 \sqrt{x_2})^2 \Rightarrow x_1^2 \cdot x_1 = x_2^2 \cdot x_2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

2ος τρόπος: Αποδεικνύουμε τη συνεπαγωγή: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

• Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5$ είναι "1-1" στο $A = \mathbb{R}$ αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Rightarrow x_1^3 + 5 \neq x_2^3 + 5 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

3ος τρόπος: Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

• Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^3 - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ αφού για κάθε

$$x_1, x_2 \in (0, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \ln x_1 + x_1^3 - 1 < \ln x_2 + x_2^3 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

οπότε θα είναι και "1-1"

4ος τρόπος: Από την πρόταση:

Αν η συνάρτηση $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε και η $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι "1-1"

• Για παράδειγμα αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f^3(x) + \ln f(x) = x^3 - 1, x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι "1-1"

Παρατήρηση Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει «κλάδους», αποδεικνύουμε ότι κάθε «κλάδος» είναι συνάρτηση "1-1" και τα **αντίστοιχα σύνολα τιμών δεν έχουν κοινά στοιχεία**

Άσκηση 133. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x) = 1 + 3^x + x^3$

β) $f(x) = \ln(2x - 1)$

γ) $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$

δ) $f(x) = 1 - \ln(1 - 2e^x)$

ε) $f(x) = \ln \frac{x}{e - x}$

Άσκηση 134. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού τους.

α) $f(x) = \frac{3^x}{1 + 3^x}$

β) $f(x) = \ln(\ln x)$

γ) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

δ) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 3$

ε) $f(x) = x^2 - 6x + 10, x > 3$

Άσκηση 135. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού τους. α) $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 0 \\ x^2+2, & x \geq 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ -3x+2, & x \geq 1 \end{cases}$

Άσκηση 136. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = f(x) + \alpha x, x \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, να δείξετε ότι:
α) η f είναι "1-1" β) $f(0) = 0$

Άσκηση 137. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν η συνάρτηση f είναι "1-1" και $f(g(x)) = g^3(x) + f(x^3 + x + 1), x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση g είναι επίσης "1-1".

Άσκηση 138. α) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) + 3e^{f(x)} - x^3 = 0, x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".
β) Το ίδιο για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{g(x)}(g^2(x) - g(x) + 3) = x^3 - 2$

8.1.2. Λύση εξισώσεων της μορφής $f(g(x)) = f(h(x))$ (1) και $f(x) = \kappa$ (2)

• Για την εξίσωση (1), αν δεν δίνεται το διάστημα στο οποίο πρέπει να την λύσουμε, τότε πρέπει $\{x \in D_g : g(x) \in D_f \text{ και } x \in D_h : h(x) \in D_f\}$

$$f(g(x)) = f(h(x)) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} g(x) = h(x)$$

• Η εξίσωση (1) αφού η f είναι "1-1" έχει μία ρίζα το πολύ, οπότε αν παρατηρήσουμε την ρίζα αυτή θα είναι και μοναδική

Άσκηση 139 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι "1-1".

β) Να λύσετε την εξίσωση $g(4^x - 2^{x+2} + 4) = g(2^{x+2} - 4)$

Άσκηση 140. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$ είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να λύσετε ως προς $\kappa \in \mathbb{R}$ την εξίσωση

$$\alpha^{\kappa^2-4} - \alpha^{\kappa-2} = (\kappa^2 - 4) - (\kappa - 2)$$

Άσκηση 141. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(1+f(x)) = 2x - 6 + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1"

β) Να βρείτε το $f(3)$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(1+2f(x^2+x+1)) = f(1+f(5)) - 4$

Άσκηση 142 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $e^x = 1 - x^7$

β) $\ln(x-3) = 4 - x$

γ) $(e^x + \sqrt{x})^3 + e^x = (\sqrt{x} + 1)^3 + 1$

δ) $\ln(x^2 + 4) + e^{x^2+4} = \ln(2x^2) + e^{2x^2}$

ε) $e^{x^4} - e^{\frac{1}{2x^2}} = x^{12} - 8x^6, x < 0$

στ) $(2^{x^2} + x^2 + 1)^3 + 2^{x^2} + x^2 + 1 = (2^{x^2+2} + x + 3)^3 + 4 \cdot 2^x + x + 3$

Άσκηση 143. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι "1-1".

α) $f(x) = (x-2)(x-3) + 11$

β) $f(x) = \eta\mu 2x + \eta\mu 4x - 1$

Άσκηση 144. α) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x^2 + 2) + f(4x - 1) = 10$, να αποδείξετε ότι δεν είναι "1-1"

β) Ομοίως για την $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) \leq f(x) \cdot f(\alpha - x), \alpha \neq 0, x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 145. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $2f(x^4) - f^2(x^2) \geq 1, x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι δεν είναι "1-1"

Άσκηση 146. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f \circ f(x) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = 1$

β) Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - x \cdot f(x) + 1, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι "1-1"

γ) Η συνάρτηση f είναι "1-1" στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Άσκηση 147. Θεωρούμε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x, y > 0$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

- α) Να βρείτε το $f(1)$
- β) Να δείξετε ότι f είναι "1-1".
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 2) + f(x) = f(5x - 6)$
- δ) Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x > 1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

Άσκηση 148. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- β) Να εξετάσετε αν η f είναι "1-1".
- γ) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνήσια μονότονη
- δ) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

Άσκηση 149. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι "1-1"
- β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\ln x^x + x = 1$ ii) $\ln \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2} = \frac{1 - x^2}{(2x^2 + 1)(x^2 + 2)}$

Άσκηση 150.

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^5$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(g(x)) = e^x + x^5$ είναι "1-1"
- γ) Να βρείτε συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x + \ln^5 x = e^{h(x)} + h^5(x)$