

1. Τι ονομάζουμε έκφραση στα Μαθηματικά;

Ένα σύνολο από λέξεις και σύμβολα που έχει κάποιο νοητικό περιεχόμενο.

Π.χ. Ο αριθμός 3 διαιρεί το 24.

2. Τι ονομάζουμε λογική πρόταση ή απλά πρόταση ή λογικό ισχυρισμό στα Μαθηματικά;

Κάθε έκφραση που μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε ως αληθή ή ψευδή.

Τις λογικές προτάσεις τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα $p, q, r, s, \dots$ ή με τα αντίστοιχα κεφαλαία γράμματα $P, Q, R, S, \dots$

Π.χ. Η έκφραση p : «ο αριθμός 25 είναι πολλαπλάσιο του 3» είναι μια λογική πρόταση, γιατί μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε ως ψευδή.

Η έκφραση q : «ο αριθμός κ είναι άρτιος» δεν είναι λογική πρόταση, γιατί δεν μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε ούτε ως ψευδή ούτε ως αληθή.

3. Λογικές τιμές

Κάθε πρόταση p ανάλογα με το περιεχόμενο της, μπορεί να πάρει μια μόνο από τις παρακάτω λογικές τιμές.

- Την τιμή α , αν η p είναι αληθής.
- Την τιμή ψ , αν η p είναι ψευδής.

4. Σύνολο αληθείας

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία του τα στοιχεία του βασικού συνόλου Ω (ή όπως θα λέμε του συνόλου αναφοράς A) για τα οποία μια πρόταση p είναι αληθής, ονομάζεται σύνολο αληθείας της πρότασης p .

Δηλαδή αν είναι B το σύνολο αληθείας τότε: $B = \{x \in A / p: \text{αληθής}\}$

Παράδειγμα 1

Η πρόταση p : ο αριθμός διαιρείται με το 3 με σύνολο αναφοράς το $A = \{2, 5, 9, 11, 15, 20, 27\}$ έχει σύνολο αληθείας το $B = \{9, 15, 27\}$

5. Λογικές πράξεις ονομάζουμε τις διαδικασίες παραγωγής νέων προτάσεων συνδέοντας δύο οποιεσδήποτε προτάσεις με τις λέξεις «και», «ή», «αν», «τότε», «δεν ή όχι»

Παράδειγμα 2 Δίνονται οι προτάσεις:

α) p : «Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$ και $\beta \in \mathbb{N}$, τότε $(\alpha + \beta) \in \mathbb{Z}$ »

β) q : « Αν δύο αριθμοί α και β είναι άρτιοι ή περιττοί, τότε το άθροισμα τους είναι άρτιος αριθμός»

Για την p έχουμε τις απλές προτάσεις:

p_1 : Ο αριθμός $\alpha \in \mathbb{Z}$

p_2 : Ο αριθμός $\beta \in \mathbb{N}$

p_3 : Ο αριθμός $(\alpha + \beta) \in \mathbb{Z}$

Έτσι η πρόταση γράφεται: $(\text{αν } p_1 \text{ και } p_2), \text{ τότε } p_3$.

Για την q έχουμε τις απλές προτάσεις:

q_1 : Ο αριθμός α είναι άρτιος

q_2 : Ο αριθμός β είναι άρτιος

q_3 : Ο αριθμός α είναι περιττός

q_4 : Ο αριθμός β είναι περιττός

q_5 : Ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι άρτιος

Έτσι η πρόταση γράφεται: $(\text{αν } q_1 \text{ και } q_2) \text{ ή } (q_3 \text{ και } q_4), \text{ τότε } q_5$

6 Η συνεπαγωγή

α) Συνεπαγωγή δύο λογικών ισχυρισμών p, q ονομάζουμε την πρόταση «αν p , τότε q », η οποία συμβολίζεται με " $p \Rightarrow q$ " και διαβάζουμε « p συνεπάγεται q ».

Την πρόταση p τη λέμε υπόθεση της συνεπαγωγής ενώ την πρόταση q τη λέμε συμπέρασμα της συνεπαγωγής

Η λογική τιμή της συνεπαγωγής " $p \Rightarrow q$ " είναι:

- Ψευδής, αν η p είναι αληθής και η q ψευδής.
- Αληθής, σε κάθε άλλη περίπτωση
- Πίνακας αληθείας της " $p \Rightarrow q$ "

p	q	$p \Rightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

β) Αντίστροφη της συνεπαγωγής " $p \Rightarrow q$ ", ονομάζουμε τη συνεπαγωγή " $q \Rightarrow p$ ".

Τις προτάσεις " $p \Rightarrow q$ " και " $q \Rightarrow p$ " τις ονομάζουμε αντίστροφες προτάσεις

Παράδειγμα 3 Δίνονται οι προτάσεις:**p:** « Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο»**q:** «Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές»α) Να διατυπώσετε τις συνεπαγωγές " $p \Rightarrow q$ ", " $q \Rightarrow p$ "

β) Να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή ψευδείς.

7 Η διάζευξη δύο προτάσεωνα) Διάζευξη δύο λογικών προτάσεων **p, q** ονομάζουμε την πρόταση **(p ή q)** ή **(p ∨ q)** η οποία είναι αληθής μόνο όταν μια τουλάχιστον από τις **p, q** είναι αληθής.

- Πίνακας αληθείας της " $p \vee q$ "

p	q	$p \vee q$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

(*) **Σχόλιο:** Η πρόταση **(p ή q)** ή **(p ∨ q)** είναι ψευδής, αν και μόνο αν και οι δύο προτάσεις **p, q** είναι ψευδείς.

8 Η σύζευξη δύο προτάσεωνα) Σύζευξη δύο λογικών προτάσεων **p, q** ονομάζουμε την πρόταση**(p και q)** ή **(p ∧ q)** η οποία είναι αληθής, αν και μόνο αν και οι δύο προτάσεις **p, q** είναι αληθείς.

- Πίνακας αληθείας της $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

9 Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

α) **Ισοδυναμία** δύο λογικών ισχυρισμών p, q ονομάζουμε την πρόταση

" $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$ ", η οποία συμβολίζεται με " $p \Leftrightarrow q$ " και διαβάζουμε « p ισοδυναμεί με q » ή « p αν και μόνο αν q » ή « p συνεπάγεται q και αντίστροφα » ή « αν p , τότε και μόνο τότε q »

Η λογική τιμή της ισοδυναμίας " $p \Leftrightarrow q$ " είναι:

- **Ψευδής**, αν οι προτάσεις p, q είναι **ετερότιμες**.
- **Αληθής**, αν οι προτάσεις p, q είναι **ομότιμες**.
- Πίνακας αληθείας της " $p \Leftrightarrow q$ "

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	α

(*) **Σχόλια:**

(i) Δύο λογικές προτάσεις θα τις λέμε **ισοδύναμες**, αν και μόνο αν η πρόταση " $p \Leftrightarrow q$ " είναι αληθής ή ισοδύναμα όταν οι προτάσεις p, q είναι ομότιμες.

(ii) Από τον πίνακα αληθείας είναι προφανές ότι οι προτάσεις " $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$ ", δεν είναι ισοδύναμες

10 Άρνηση ή αντίθετη

Άρνηση ή αντίθετη μιας λογικής πρότασης p , ονομάζουμε την πρόταση "**όχι p** " και τη συμβολίζουμε με $\bar{p}$.

- Πίνακας αληθείας της "**όχι p** "

p	$\bar{p}$
α	ψ
ψ	α

• Βασικές προτάσεις και η άρνηση τους

Πρόταση Q:	Άρνηση $\bar{Q}$
« και »	« ή »
Για κάθε ($\forall$)	Υπάρχει ($\exists$)
$\alpha = \beta$	$\alpha \neq \beta$
$\alpha = \beta$	$\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$
$\alpha > \beta$	$\alpha \leq \beta$
$\alpha \geq \beta$	$\alpha < \beta$
$p \Rightarrow q$	$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$
$p \wedge q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
$p \vee q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
$p \Leftrightarrow q$	$\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$
$\alpha = 0$ ή $\beta = 0$	$\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$
$\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$	$\alpha = 0$ και $\beta = 0$
$\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$	$\alpha \neq 0$ ή $\beta = 0$

11. Αντιθετοαντιστροφή

α) Αν έχουμε την σύνθετη πρόταση, «αν p , τότε q », δηλαδή τη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, τότε την πρόταση « αν όχι p , τότε όχι q », δηλαδή την πρόταση $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$, την ονομάζουμε αντιθετοαντιστροφή της $p \Rightarrow q$

β) Δύο αντιθετοαντιστροφές προτάσεις όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα είναι ισοδύναμες.

Δηλαδή η λογική πρόταση $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ είναι **ταυτολογία**

γ) Πίνακας αληθείας των σημαντικότερων λογικών πράξεων

p	q	$p \Rightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
α	α	α	ψ	ψ	α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α	ψ	α
ψ	α	α	α	ψ	α	ψ	α	ψ	α
ψ	ψ	α	α	α	α	ψ	ψ	α	α

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Α, αν είναι αληθείς ή με Ψ, αν είναι ψευδείς.

1. $\alpha^4 + 1 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $\alpha = 3 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha$

3. $2\alpha^2 = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$

4. $\alpha \neq 5$ και $\beta \neq 2 \Rightarrow \alpha + \beta \neq 7$

5. $\alpha + \beta = 8 \Rightarrow \alpha = 5$ και $\beta = 3$

6. $x + 2 > 7 \Leftrightarrow x > 5$

7. $x + 2 > 7 \Rightarrow x > 4$

8. $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

9. $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

10. $\alpha^2 - \beta^2 = \beta^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Ασκηση 2 Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς:

α) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

β) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = A$

γ) $A = B' \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

δ) $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$

ε) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

στ) $q \Rightarrow (q \vee p)$

Ασκηση 3 Δίνονται οι προτάσεις:

$P: x^2 + y^2 = 0, x, y \in \mathbb{R}, Q: x = 0 \text{ και } y = 0, x, y \in \mathbb{R},$

Να διατυπώσετε την πρόταση $P \Rightarrow Q$, την αντίστροφη της, και την αντιθετοαντιστροφή της

Ασκηση 4 Με σύνολο αναφοράς το $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, να βρείτε το σύνολο αλήθειας των προτάσεων:

i) $p(x): \text{Ο αριθμός } x \text{ διαιρεί το } 12$

ii) $q(x): x + 3 = 5$

iii) $r(x): 3x + 3 = 14$

iv) $s(x): 4x + 3 < 15$

Ασκηση 5 Δίνεται η πρόταση:

$p(x)$: «Ο x είναι διαιρέτης του 14 και του 21».

Με σύνολο αναφοράς το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, 28\}$ να βρείτε το σύνολο αλήθειας G_p .

Ασκηση 6 Δίνεται πρόταση $p(x): x^2 - 100 = 0$, με $x \in \mathbb{R}$

Να ορίσετε την πρόταση $\bar{p}(x)$ και να βρείτε το σύνολο αλήθειας

Ασκηση 7 Να γράψετε την άρνηση των παρακάτω προτάσεων:

α) $\alpha = \beta$

β) $\alpha < \beta$

γ) $\alpha \leq \beta$

δ) $\alpha \neq 5$ και $\beta = 2$

ε) $\alpha \geq 5$ ή $\beta \neq 2$

Ασκηση 8 Να γράψετε την αντιθετοαντιστροφή των παρακάτω προτάσεων:

α) Αν $\alpha = 100$ τότε $\beta \neq 5$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\kappa \geq \lambda$ με $\alpha, \beta, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

γ) Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

δ) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$