

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η Εσωτερικό Γινόμενο

23/12/2024

Βασικές κατηγορίες ασκήσεων για την παράγραφο 1.5

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 1^η:

Ζητείται το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$

- Αν ξέρω τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ έστω

$$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2) \text{ τότε } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

- Αν ξέρω τα μέτρα και την γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ τότε

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{\beta}))$$

- Αν ξέρω τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και μια σχέση της μορφής

$$\vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta}$$

$$\text{Τότε: } \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\gamma}|^2 = |\lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 = (\lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta})^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 = \lambda^2 \vec{a}^2 + 2\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) + \mu^2 \vec{\beta}^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{\gamma}^2 = \lambda^2 |\vec{a}|^2 + 2\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) + \mu^2 |\vec{\beta}|^2 \text{ και λύνουμε ως προς } \vec{a} \cdot \vec{\beta}$$

Άσκηση 98 Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, στις παρακάτω περιπτώσεις

α) $\vec{a} = (1, -3), \vec{\beta} = (-2, 2)$

β) $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2} \text{ με } (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

γ) $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{\beta}| = \sqrt{6}, |\vec{\gamma}| = 1, \text{ και } 2\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0.$

Άσκηση 99 Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$, δύο διανύσματα τέτοια ώστε $|\vec{a}| = 8, |\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$

Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{a} \cdot (-2\vec{\beta})$ γ) $\vec{a}^2$ δ) $(2\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{\beta})$

Άσκηση 100 Έστω τρίγωνο ABΓ με $A(-1,2), B(-2,1), \Gamma(3,1)$, να βρείτε τα εσω-

τερικά γινόμενα: α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ β) $\overrightarrow{AB}^2$ γ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$, AM

διάμεσος

Άσκηση 101 Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ πλευράς α και η διάμεσος ΑΔ, να

βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ β) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ γ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ β) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Delta}$

Άσκηση 102 Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (1,0), \vec{\beta} = (1,1), \vec{\gamma} = (0,1)$

α) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: i) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$ ii) $\frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{\vec{\gamma}^2}$

β) Να βρείτε τα διανύσματα: $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} + \frac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}$, $\vec{v} = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} + (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{a}$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 2^η: Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα τότε αποδεικνύουμε ότι έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν.

- Αν ξέρω τις συντεταγμένες των διανυσμάτων ή τις γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα x'x τότε: $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 1

Αν $\vec{a} + \vec{\beta} = (17, -7)$ και $\vec{a} - \vec{\beta} = (-13, 13)$ να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Λύση

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι λύση του συστήματος

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (17, -7) \\ \vec{\alpha} - \vec{\beta} = (13, 13) \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 2\vec{\alpha} = (30, 6) \Leftrightarrow \vec{\alpha} = (15, 3)$$

Οπότε:

$$(15, 3) + \vec{\beta} = (17, -7) \Leftrightarrow \vec{\beta} = (17, -7) - (15, 3) = (2, -10) \text{ και επειδή}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (15, 3) \cdot (2, -10) = 30 - 30 = 0, \text{ τα διανύσματα } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ είναι κάθετα.}$$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 2.

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Λύση

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 6 \left(-\frac{1}{2} \right) = -3$$

Τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ να είναι κάθετα αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow (3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 3\kappa\vec{\alpha}^2 + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - \kappa\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 0 \stackrel{(\vec{\alpha}\vec{\beta}=0)}{\Leftrightarrow} 3\kappa|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3\kappa \cdot 2^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 3

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1, 1), B(3, \lambda + 2)$ και $\Gamma(\lambda^2 - 2, 3)$ είναι ορθογώνιο στο **A**.

Για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε να δείξετε ότι το τρίγωνο **ABΓ** είναι ισοσκελές.

Λύση

Είναι $\overrightarrow{AB} = (2, \lambda + 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (\lambda^2 - 3, 2)$

Για να είναι ορθογώνιο στο Α αρκεί

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow 2, \lambda + 1 \cdot \lambda^2 - 3, 2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 3 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \vee \lambda = -2$$

Για $\lambda = 1$ έχουμε: $\overrightarrow{AB} = 2, -1$ και $\overrightarrow{AG} = 1, 2$, επειδή $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$ και $|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

Για $\lambda = -2$ έχουμε: $\overrightarrow{AB} = 2, 2$ και $\overrightarrow{AG} = -2, 2$, επειδή $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

Άσκηση 103 Αν $\vec{a} + \vec{\beta} = (17, -7)$ και $\vec{a} - \vec{\beta} = (-13, 13)$ να βρείτε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και να αποδείξετε ότι είναι κάθετα.

Άσκηση 104 Αν είναι $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \kappa\vec{a} + \vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Άσκηση 105 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1, 1), B(3, \lambda + 2)$ και $\Gamma(\lambda^2 - 2, 3)$ είναι ορθογώνιο στο Α.

Για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές.

Άσκηση 106 Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = |\vec{a}|\vec{\beta} + |\vec{\beta}|\vec{a}$ και $\vec{v} = |\vec{a}|\vec{\beta} - |\vec{\beta}|\vec{a}$ να είναι κάθετα.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 3Η: Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι:

α) Ομόρροπα:

Αρκεί να δείξουμε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ ή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ ή $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ ή $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}, \lambda > 0$

β) Αντίρροπα:

Αρκεί να δείξουμε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$ ή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ ή $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi$ ή $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}, \lambda < 0$.

Παράδειγμα – Εφαρμογή 4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \frac{1}{2}|\vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |4\vec{\beta} - 5\vec{\alpha}|$.
Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

Λύση

$$\text{Είναι } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |4\vec{\beta} - 5\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |4\vec{\beta} - 5\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (4\vec{\beta} - 5\vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 16\vec{\beta}^2 - 40\vec{\alpha}\vec{\beta} + 25\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow 15\vec{\beta}^2 - 42\vec{\alpha}\vec{\beta} + 24\vec{\alpha}^2 = 0 \Leftrightarrow 15\vec{\beta}^2 + 24\vec{\alpha}^2 = 42\vec{\alpha}\vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$5|\vec{\beta}|^2 + 8|\vec{\alpha}|^2 = 14\vec{\alpha}\vec{\beta} \quad (\vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}|) \Leftrightarrow 5(2|\vec{\alpha}|)^2 + 8|\vec{\alpha}|^2 = 14\vec{\alpha}\vec{\beta} \Leftrightarrow 20|\vec{\alpha}|^2 + 8|\vec{\alpha}|^2 = 14\vec{\alpha}\vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$28|\vec{\alpha}|^2 = 14\vec{\alpha}\vec{\beta} \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha}\vec{\beta} \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}| = \vec{\alpha}\vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\alpha}| = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, \text{ οπότε } \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 5

Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{10} \text{ και } 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}. \text{ Να αποδείξετε ότι } \vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -|\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}|$

$$\text{Έστω } \frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{10} = \lambda, \text{ τότε: } |\vec{\alpha}| = 3\lambda, |\vec{\beta}| = 4\lambda \text{ και } |\vec{\gamma}| = 10\lambda \quad (1)$$

$$\text{Είναι } 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} + \vec{\gamma} = -2\vec{\alpha},$$

$$\text{άρα } (\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = 4\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\beta}^2 + 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}^2 = 4\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 + 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + |\vec{\gamma}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16\lambda^2 + 2\vec{\beta}\vec{\gamma} + 100\lambda^2 = 4 \cdot 9\lambda^2 \Leftrightarrow 2\vec{\beta}\vec{\gamma} = -116\lambda^2 + 36\lambda^2 \Leftrightarrow \vec{\beta}\vec{\gamma} = -40\lambda^2 \quad (2)$$

$$\text{Και } |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| \stackrel{(1)}{=} 4\lambda \cdot 10\lambda = 40\lambda^2 \quad (3)$$

$$\text{Από (2) και (3) προκύπτει } \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -|\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$$

Άσκηση 107 Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\gamma}| = 3$ και

$$\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \vec{\gamma} \text{ να δείξετε ότι } \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$$

Άσκηση 108 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \frac{1}{2} \cdot |\vec{\beta}|$ και

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |4\vec{\beta} - 5\vec{\alpha}| \text{ Να αποδείξετε ότι } \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$$

Άσκηση 109 α) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

β) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ και $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 3, |\vec{\gamma}| = 2$ δείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

Άσκηση 110 α) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

β) Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = |\vec{\gamma}| \text{ δείξτε ότι } \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 4^η: Όταν θέλουμε να βρούμε το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{\gamma}$ γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων π.χ. $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ τότε υπολογίζουμε το $|\vec{\gamma}|^2$ από την σχέση $|\vec{\gamma}|^2 = \vec{\gamma}^2$ και στη συνέχεια βρίσκουμε το μέτρο του $\vec{\gamma}$.

Παράδειγμα – Εφαρμογή 6

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

Λύση

$$\text{Αφού } \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$$

$$\text{Είναι } |\vec{u}|^2 = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 - \cancel{12\vec{\alpha}\vec{\beta}} + 9\vec{\beta}^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 = 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot 2^2 = 40,$$

οπότε

$$|\vec{u}|^2 = 40 \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 7

Αν είναι $\vec{\delta} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 5$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta}$.

Λύση

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5, \text{ άρα } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -5 \text{ και}$$

$$|\vec{\delta}|^2 = |5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|^2 = (5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})^2 = 25\vec{\alpha}^2 - 40\vec{\alpha}\vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2 = 25 \cdot 2^2 - 40 \cdot (-5) + 16 \cdot 5^2 =$$

$$= 100 + 200 + 16 \cdot 15 = 300 + 240 = 540.$$

$$\text{Άρα } |\vec{\delta}|^2 = 540 \Leftrightarrow |\vec{\delta}| = \sqrt{540} = 2\sqrt{135}$$

Άσκηση 111 Αν είναι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

Άσκηση 112 Αν είναι $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta}$.



ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 5^η:

Όταν θέλουμε να βρούμε τη γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, έστω

$$\hat{\theta} = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \text{ τότε υπολογίζουμε το } \cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}.$$

Σχόλιο: Αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των διανυσμάτων, έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$

$$\text{και } \vec{\beta} = (x_2, y_2) \text{ τότε } \cos \theta = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

- Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0 \Leftrightarrow \cos \theta > 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}$, οξεία
- Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0 \Leftrightarrow \cos \theta < 0 \Leftrightarrow \hat{\theta}$, αμβλεία
- Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{\pi}{2}$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 8

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{AD} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε τα μήκη των διαγώνιων του και το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους.

Λύση

Για τις διαγώνιες του παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ** έχουμε:

$$\vec{\delta}_1 = \vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ άρα } \vec{\delta}_1 = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} \text{ και}$$

$$\vec{\delta}_2 = \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = -\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}, \text{ άρα } \vec{\delta}_2 = -\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$$

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$|\vec{\delta}_1|^2 = |3\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 9\vec{\alpha}^2 - 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 9 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 10 - 3 = 7, \text{ άρα}$$

$$|\vec{\delta}_1|^2 = 7 \Leftrightarrow |\vec{\delta}_1| = \sqrt{7}.$$

$$\text{Επίσης } |\vec{\delta}_1|^2 = |3\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (-\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 10 + 3 = 13, \text{ άρα}$$

$$|\vec{\delta}_2|^2 = 13 \Leftrightarrow |\vec{\delta}_2| = \sqrt{13}.$$

Αν φ η γωνία των διαγώνιων του παραλληλογράμμου, τότε:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{3\vec{\alpha} - \vec{\beta} \cdot -\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{13}} = \\ &= \frac{-3\vec{\alpha}^2 - 9\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-3 - 8 \cdot \frac{1}{2} + 3}{\sqrt{91}} = -\frac{4}{\sqrt{91}} \end{aligned}$$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 9

Δίνονται τα σημεία **A(2,1)**, **B(-1,0)** και **Γ(4,5)** του επιπέδου **Oxy**.

Να αποδειχθεί ότι αποτελούν κορυφές τριγώνου και να υπολογιστεί η γωνία **A** του τριγώνου.

Λύση

Τα σημεία A,B,Γ είναι κορυφές τριγώνου αν και μόνο αν δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\vec{AB} = (-1-2, 0-1) = (-3, -1)$, $\vec{AG} = (4-2, 5-1) = (2, 4)$, και επειδή

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10 \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow$ τα σημεία **A, B, Γ** δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = (-3, -1) \cdot (2, 4) = -6 - 4 = -10$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ και $|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AG}|} = \frac{-10}{\sqrt{10} 2\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \hat{A} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 10

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και να βρείτε τη γωνία $\theta = (\vec{\delta}, \vec{\alpha})$.

Λύση

Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 6 \cdot \frac{-1}{2} = -3$, άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$ (1)

$$\text{και } \cos \theta = \cos(\vec{\delta}, \vec{\alpha}) = \frac{\vec{\delta} \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\delta}| \cdot |\vec{\alpha}|} \quad (2)$$

$$\bullet \vec{\delta} \cdot \vec{\alpha} = (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} = 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} \stackrel{(1)}{=} 3 \cdot 2^2 + 2(-3) = 12 - 6 = 6, \text{ άρα } \vec{\delta} \cdot \vec{\alpha} = 6 \quad (3)$$

$$\bullet |\vec{\delta}|^2 = |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = 9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \stackrel{(1)}{=} \stackrel{(2)}{=} 9 \cdot 4 + 12(-3) + 4 \cdot 3^2 = 36 - 36 + 36,$$

$$\text{άρα } |\vec{\delta}| = 6 \quad (4)$$

$$\text{Από (2), (3), (4) έχουμε: } \cos \theta = \frac{6}{6 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \text{ άρα } \theta = (\vec{\delta}, \vec{\alpha}) = \frac{\pi}{3}$$

Παράδειγμα – Εφαρμογή 11

Αν είναι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\gamma}, \vec{\alpha}) = \frac{2\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}$.

Λύση

$$\text{Αν } \hat{\theta} \text{ η ζητούμενη γωνία, τότε } \cos \hat{\theta} = \frac{(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma})}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}|}$$

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \text{ άρα } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{2} \quad \text{και}$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = |\vec{\beta}| |\vec{\gamma}| \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 1 \cdot 3 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{3}{2}, \text{ άρα } \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -\frac{3}{2} \quad \text{και}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = |\vec{\alpha}| |\vec{\gamma}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = 1 \cdot 3 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{3}{2}, \text{ άρα } \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = -\frac{3}{2}$$

$$\bullet (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\alpha}\vec{\gamma} + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 - \vec{\beta}\vec{\gamma} + 2\vec{\alpha}\vec{\gamma} - \vec{\beta}\vec{\gamma} - \vec{\gamma}^2 =$$

$$= 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} - \vec{\beta}^2 - 2\vec{\beta}\vec{\gamma} - \vec{\gamma}^2 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 + 2\frac{3}{2} - 9 = -8 - 2 + 3 = -7$$

$$\text{Άρα } (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}) = -7 \quad (1)$$

$$\bullet |\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha}) = 1 + 1 + 9 + 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 11 + 2\left(-\frac{7}{2}\right) = 4, \text{ άρα } |\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = 4 \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 2 \quad (2)$$

$$\bullet |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}|^2 = (2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + (-4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\vec{\gamma} - 4\vec{\gamma}\vec{\alpha}) =$$

$$= 4 + 1 + 9 + \left(\frac{4}{2} - \frac{6}{2} + \frac{12}{2}\right) = 14 + 5 = 19, \text{ άρα } |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}|^2 = 19 \Leftrightarrow |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}| = \sqrt{19} \quad (3)$$

$$\text{Επομένως } \sin \hat{\theta} = \frac{(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}) \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma})}{|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| |2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}|} = \frac{-7}{2\sqrt{19}} = -\frac{7\sqrt{19}}{38}$$

Άσκηση 113 Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(4,5)$ του επιπέδου Oxy

Να αποδειχθεί ότι αποτελούν κορυφές τριγώνου και να υπολογιστεί η γωνία A του τριγώνου.

Άσκηση 114 Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να βρείτε τη γωνία $\hat{\theta} = (\vec{\delta}, \vec{\alpha})$.

Άσκηση 115 Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\gamma}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\gamma}, \vec{\alpha}) = \frac{2\pi}{3}$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

Άσκηση 116 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{AD} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

Αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε τα μήκη των διαγώνιων του και το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους.

Άσκηση 117 Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η γωνία των διανυσμάτων

$$\vec{\alpha} = (1, -\lambda), \vec{\beta} = (\lambda, 3) \text{ να είναι } \frac{2\pi}{3}$$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 6^η: Επίλυση ανισοτήτων με την βοήθεια των σχέσεων:

- $|\vec{\alpha}\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

Άσκηση 118 Να δείξετε ότι $-5 \leq 3\sin x + 4\eta\mu x \leq 5, x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 119 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ δείξτε ότι } |3x + y| \leq 10. \text{ Πότε ισχύει η ισότητα ;}$$

Άσκηση 120 Να δείξετε ότι $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (5-y)^2} \geq \sqrt{10}$

Άσκηση 121 Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 22}$$

Γενικές Ασκήσεις – Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση 122 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ με $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} + \vec{b}$ είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του κ .

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{b}$.

Άσκηση 123 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι: $\vec{AB} = (-4, -6)$, $\vec{A\Gamma} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

γ) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ επιπλέον ισχύει $A(3, 1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ .

Άσκηση 124. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ για τα οποία ισχύει: $2|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ και

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$

Άσκηση 125. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\vec{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ να είναι κάθετα. 

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\vec{BG}$.

Άσκηση 126. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}| = 4$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$. 

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{a} = \vec{0}$. 

Άσκηση 127. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$.

Αν $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$. 

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$. 

Άσκηση 128. Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν:

$$3|\vec{a}| + |\vec{\beta}| = 9, \quad 2|\vec{a}| - |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}.$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$. 

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$.

Άσκηση 129. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, και κατόπιν την τιμή της παράστασης: $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (2\vec{\beta})$

β) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{a}$.

Άσκηση 130. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$

β) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{a}\vec{\beta})^2 \cdot \vec{a}$

Άσκηση 131. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x-1)$ είναι κάθετα.

Άσκηση 132. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = 5\vec{a} - 4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{u} \perp \vec{v}$ και $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$.

Άσκηση 133. Έστω δυο διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7}, 1\right)$ και

$$\vec{a} + 7\vec{\beta} = (\mu + 2, 7 - 2\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{a}$ ως συνάρτηση του μ .

β) Αν $\mu = 2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\vec{a} = (3, -4)$ και ότι το $\vec{a}$ είναι κάθετο στο $\vec{a} + 7\vec{\beta}$.

ii. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$

Άσκηση 134. Έστω $\vec{a} = (2, -3)$ και $\vec{b} = (-5, 1)$ δύο διανύσματα.

α) Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{|\vec{a}| + |\vec{b}|}{\sqrt{-\vec{a} \cdot \vec{b}}}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Άσκηση 135.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2.$$

β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγώνιου ΒΔ.

Άσκηση 136. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$ και $\vec{OB} = (1, 2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι κάθετα.

β) Αν Γ (α, β) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\vec{AB} = (-3, 4)$ και $\vec{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\vec{OG}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Άσκηση 137. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ, \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{a} - \vec{b}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}.$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$

β) Αν ισχύει $\vec{b} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

Άσκηση 138.

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ και } |\vec{u} + \vec{v}| = \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|.$$

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \text{ και } \frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$$

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

Άσκηση 139. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $|\vec{\beta}|$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

Άσκηση 140. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \neq \vec{0}$

β) Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{x})$

Άσκηση 141.

1. ΘΕΜΑ 2_22040

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{a}$.

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{a}$ και να έχει μέτρο 1.

Άσκηση 142.**2. ΘΕΜΑ 2_21682**

Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{a} - \vec{\beta} = (-5, -10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}|$.

Άσκηση 143.**3. ΘΕΜΑ 2_20773**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$.

β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$.

γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

Άσκηση 144.**4. ΘΕΜΑ 2_20733**

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = |\vec{\beta}|$ και $\vec{AB} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = \vec{a} + \vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{BG}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ είναι κάθετα.

Άσκηση 145.**5. ΘΕΜΑ 2_20732**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{a}|$.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να δείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$.

Άσκηση 146.**6. ΘΕΜΑ 2_15252**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2, 1)$ και $\vec{AG} = (3, -1)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{BG} = (1, -2)$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

Άσκηση 147.**7. ΘΕΜΑ 2_15852**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$, $\vec{\beta} = (-2, 1)$.

Να υπολογίσετε:

- α) το διάνυσμα $\vec{\nu} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$,
- β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$,
- γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu}$,

Άσκηση 148.**8. ΘΕΜΑ 2_22554**

Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $\vec{x}$, $\vec{y}$ τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$. Έστω Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε

$$\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB}).$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$, ii. $\vec{OM} = \vec{j}$.

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$.

Άσκηση 149.**9. ΘΕΜΑ 2_22170**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{\nu} = (x^2, x - 1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.
- β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{\nu}$ είναι κάθετα.
- γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{\nu}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

Άσκηση 150.**10. ΘΕΜΑ 2_14586**

Δίνονται τα σημεία Α(1, 2), Β(3, 4) και Γ(5, -2).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{AG}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.
- β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\vec{AM}$ και $\vec{BG}$.
- γ) Να γραφεί το $\vec{BG}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{AG}$ και $\vec{AM}$.

Άσκηση 151.**11. ΘΕΜΑ 2_20888**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Άσκηση 152.**12. ΘΕΜΑ 2_20685**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta,0)$, $\Gamma(0,\gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

Άσκηση 153.**13. ΘΕΜΑ 2_15186**

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$. Να αποδείξετε ότι:

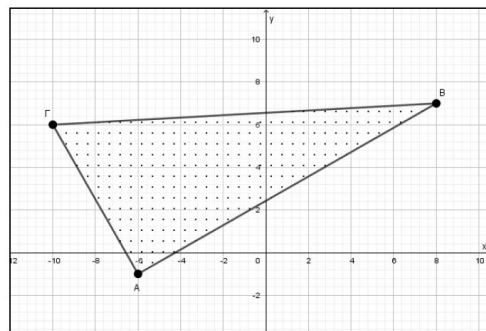
α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

Άσκηση 154.**14. ΘΕΜΑ 2_15996**

Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

Άσκηση 155.**16. ΘΕΜΑ 2_16428**

Δίνονται τα διανύσματα με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$.

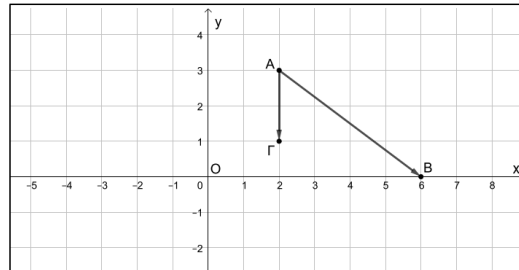
β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Άσκηση 156.**15. ΘΕΜΑ_2_17075**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (0, -2)$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.

**Άσκηση 157.****17. ΘΕΜΑ_2_16427**

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 158.**18. ΘΕΜΑ_2_16426**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{\beta})$.

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{a}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.

Άσκηση 159.**20. ΘΕΜΑ_2_14953**

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, 5)$, $B(7, 8)$, $\Gamma(1, -4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

Άσκηση 160.**24. ΘΕΜΑ_2_15379**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{\beta} = (3, -1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

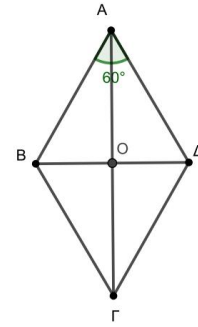
β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$.

Άσκηση 161.**21. ΘΕΜΑ 2_16144**

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$.

Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

- α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$ γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$
 δ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$ ε) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

**Άσκηση 162.****22. ΘΕΜΑ 2_16141**

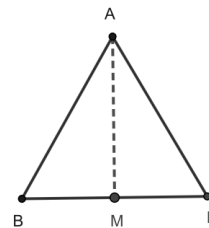
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

- i. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ ii. $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B\Gamma})$ iii. $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\Gamma A})$
 iv. $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{\Gamma M})$ v. $(\overrightarrow{\Gamma M}, \overrightarrow{\Gamma B})$

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$ ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$ iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$

**Άσκηση 163.****23. ΘΕΜΑ 2_15825**

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

γ) Να βρείτε τη $(\vec{a}, \vec{\gamma})$.

Άσκηση 164.**25. ΘΕΜΑ 2_15463**

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (1, -2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$.

Άσκηση 165.**26. ΘΕΜΑ_2_15073**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$.
- β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.
- γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$.

Άσκηση 166.**27. ΘΕΜΑ_2_15038**

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{a}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$.
- β) Να βρείτε τα $\vec{a}^2$ και $\vec{\beta}^2$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{a} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{\beta}) = 15$.

Άσκηση 167.**28. ΘΕΜΑ_3_18243**

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 4, (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$.

- α) Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.
- β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.
- γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$.
- δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.

Άσκηση 168.**30. ΘΕΜΑ_4_22063**

α) Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } |\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \quad \text{ii. } |\vec{a} + \vec{\beta}| = ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$$

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι:

$$\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad |\vec{a}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{\gamma}| = 1$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\gamma} \quad \text{ii. } \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \quad \text{iii. } \vec{a} = \vec{\gamma} \text{ και } \vec{\beta} = -2\vec{a}$$

Άσκηση 169.**32. ΘΕΜΑ 4_15320**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

ii. $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

β) Αν $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 170.**33. ΘΕΜΑ 4_18547**

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda - 2, \lambda - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου.

ii. το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

i. το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

Άσκηση 171.**31. ΘΕΜΑ 4_18520**

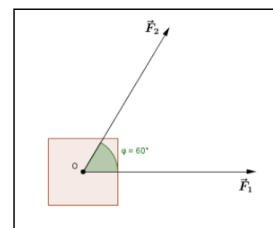
α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ ισχύει: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$ (1).

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$.

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



Άσκηση 172.

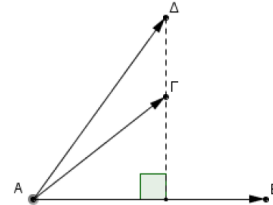
29. ΘΕΜΑ_4_22064

α) Αν $\vec{AB}$, $\vec{AG}$, $\vec{AD}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ και $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$:

- i. είναι αριθμοί ή διανύσματα; ii. μπορούν να συγκριθούν;

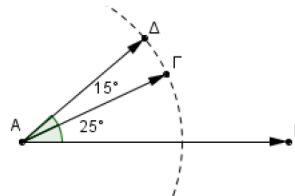
β) Για τα διανύσματα του σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- i. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$
 ii. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$
 iii. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$



γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο Α) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- i. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$
 ii. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$
 iii. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$



Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.