

Η έννοια του συνόλου**1.Ορισμός**

Σύμφωνα με τον μαθηματικό **Cantor**, **σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων τα οποία προέρχονται από την εμπειρία ή την διανοήση μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά ονομάζονται **στοιχεία ή μέλη** του συνόλου.

Για παράδειγμα

Οι μαθητές του 2^{ου} Γενικού Λυκείου Ηρακλείου, οι ομάδες της Super League, ο σύλλογος των καθηγητών του 2^{ου} Γενικού Λυκείου Ηρακλείου αποτελούν σύνολα, αφού τα στοιχεία τους αναγνωρίζονται με σιγουριά.

1α. «Καλώς ορισμένο»

Ένα σύνολο θα λέμε ότι είναι «καλώς ορισμένο», όταν όλα τα στοιχεία του μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά.

1β. Συμβολισμοί

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα A,B,Γ,... του Ελληνικού και A,B,C,D,... του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του τα αντίστοιχα μικρά γράμματα α, β, γ, δ,... και a,b,c,d,....

Για παράδειγμα:

- με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών
- με $\mathbb{Z}$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακεραίων αριθμών
- με $\mathbb{Q}$ συμβολίζουμε το σύνολο των ρητών αριθμών
- με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών

1γ. Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x είναι στοιχείο ενός συνόλου A, γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A», ενώ για δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο ενός συνόλου A, γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A»

Για παράδειγμα: $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$, $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$, $-4 \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

2. Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε ένα από τους παρακάτω τρόπους.

1ος τρόπος: Με αναγραφή

Όταν είναι λίγα σε πλήθος τα στοιχεία ενός συνόλου, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά ανάμεσα σε δύο άγκιστρα, χωρίζοντας τα με το κόμμα.

Για παράδειγμα:

- Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 1,3,5,7 γράφεται $A = \{1,3,5,7\}$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό και για τα σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία γράφοντας μερικά από αυτά κόμμα τρεις τελίτσες, αρκεί να είναι σαφής η «ακολουθία - σειρά» των στοιχείων.

Για παράδειγμα:

- Το σύνολο των ακεραίων από 1 έως 50 γράφεται $B = \{1,2,3,\dots,50\}$
- Το σύνολο των φυσικών αριθμών γράφεται $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$
- Το σύνολο των ακεραίων αριθμών γράφεται $\mathbb{Z} = \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots\}$
ή $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

2ος τρόπος: Με περιγραφή

Πολλές φορές δεν είναι εύκολο ή είναι αδύνατο να γράψουμε όλα τα στοιχεία ενός συνόλου ή να δείξουμε την σειρά με την οποία εμφανίζονται, οπότε δεν μπορούμε να το παραστήσουμε με τον προηγούμενο τρόπο.

Για παράδειγμα, θέλουμε να γράψουμε το σύνολο των ρητών αριθμών.

Θυμάστε ρητοί αριθμοί είναι όλα τα κλάσματα που έχουν αριθμητή και παρονομαστή ακέραιο αριθμό. Επίσης ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί αριθμοί, οπότε δεν μπορούμε να ξέρουμε για παράδειγμα ποιος είναι ο «επόμενος»

ρητός του $\frac{1}{5}$

Στην περίπτωση αυτή, μέσα στα άγκιστρα γράφουμε το σύνολο από το οποίο επιλέγουμε τα στοιχεία και σημειώνουμε την ιδιότητα (I) πού έχουν

- Το σύνολο των ρητών είναι $\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\mu}{\nu}, \text{όπου } \mu, \nu \in \mathbb{Z} \text{ με } \nu \neq 0 \right\}$
- Το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

Ο παραπάνω τρόπος λέγεται «παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του»

3. Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα A και B θα λέμε ότι είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία και γράφουμε $A = B$

Δηλαδή όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A

4. Το κενό σύνολο

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία και συμβολίζεται με $\emptyset$ ή $\{ \}$

5. Υποσύνολο συνόλου

Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και γράφουμε $A \subseteq B$

Για παράδειγμα

Το σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ αφού κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.

• Τα υποσύνολα του συνόλου A είναι τα σύνολα: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα υποσύνολα του A ονομάζεται **δυναμοσύνολο** του συνόλου A και συμβολίζεται με $P(A)$

Δηλαδή $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Σχόλιο: Ορίζουμε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού:

i). $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο A

ii). Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$

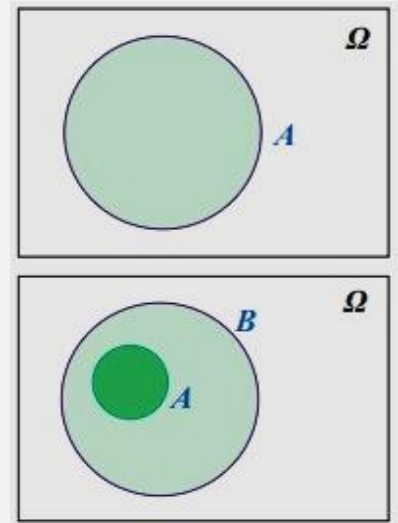
iii). Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$

6. Διαγράμματα Venn

Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn

• **Βασικό σύνολο:** Θεωρούμε ότι όλα τα σύνολα είναι υποσύνολα ενός συνόλου, το οποίο ονομάζεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω .

- ✓ Το βασικό σύνολο Ω , θεωρούμε ότι είναι το εσωτερικό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ενώ κάθε υποσύνολο παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης, η οποία περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.



- ✓ Αν $A \subseteq B$, τότε το A παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το B.

7. Πράξεις με σύνολα

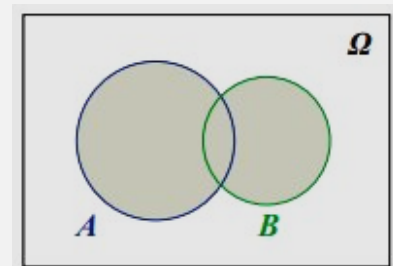
Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολα του

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ και } B = \{2, 3, 4, 5\}$$

- Το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ που έχει ως στοιχεία του τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των A και B, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα A και B λέγεται **ένωση** των συνόλων A και B.

Γενικά:

Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$

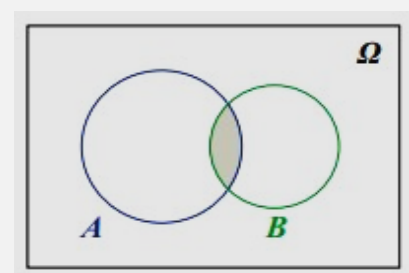


Δηλαδή είναι: $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$

- Το σύνολο $\{2, 3\}$ που έχει ως στοιχεία του τα κοινά στοιχεία των A και B, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B λέγεται **τομή** των συνόλων A και B.

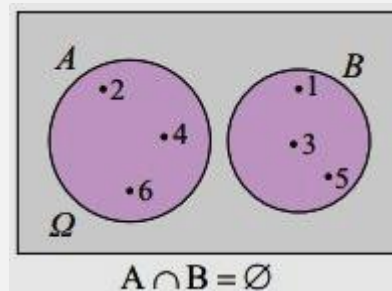
Γενικά:

Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με $A \cap B$



Δηλαδή είναι: $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$

Ξένα μεταξύ τους: Στην περίπτωση που δύο σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή $A \cap B = \{\} = \emptyset$, τα δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους.



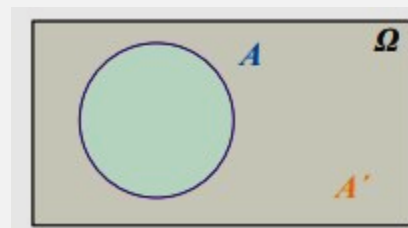
Άμεσες συνέπειες:

- ✓ $A \cap B \subseteq A$ και $A \subseteq A \cup B$ **οπότε** $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, **ομοίως** $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$
- ✓ Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$ και $A \cup B = B$

• Το σύνολο $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ που έχει ως στοιχεία το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο σύνολο A , λέγεται συμπλήρωμα του συνόλου A .

Γενικά:

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο σύνολο A και συμβολίζεται με A'



Δηλαδή είναι: $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$

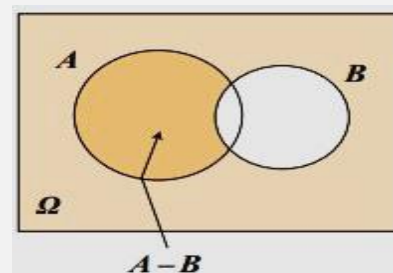
Άμεσες συνέπειες:

- ✓ $A \cup A' = \Omega$ και $A \cap A' = \emptyset$
- ✓ $\Omega' = \emptyset$ και $\emptyset' = \Omega$
- ✓ $(A')' = A$

• Το σύνολο $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ που έχει ως στοιχεία το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο σύνολο B , λέγεται διαφορά του B από το A .

Γενικά:

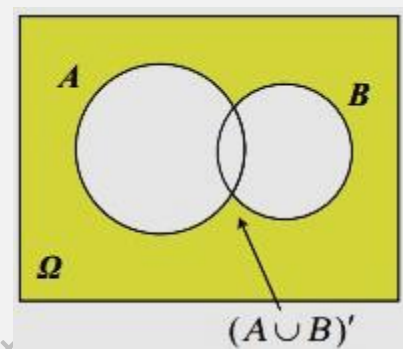
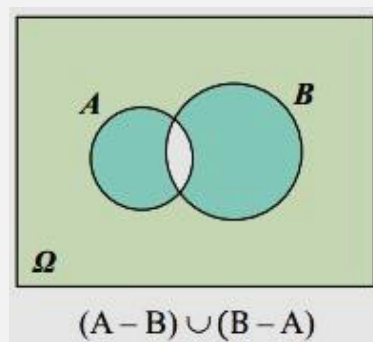
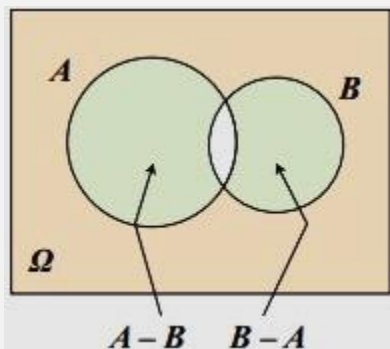
Διαφορά ενός συνόλου B από ένα σύνολο A λέγεται το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο σύνολο B και συμβολίζεται με $A - B$



Δηλαδή είναι: $A - B = \{x \in A / x \notin B\}$

Άμεσες συνέπειες:

- ✓ $A - B = A \cap B'$ και $A' - B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$
- ✓ $(A - B) \subseteq A$ και $(B - A) \subseteq B$
- ✓ $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$
- ✓ $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ και $(B - A) \cup (A \cap B) = B$
- ✓ $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ και $A \cup B' = (B - A)'$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.1 Ισχύει $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ Σ ή Λ;

Άσκηση 1.2 Ποιες σχέσεις είναι σωστές;

$$-3 \in \mathbb{N}, 5 \in \mathbb{Z}, 3, 14 \notin \mathbb{R}, 7 \in \mathbb{N}, \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}, -3\frac{2}{5} \notin \mathbb{Q}, 2, \bar{5} \in \mathbb{Q}, \sqrt{9} \in \mathbb{N}, \sqrt{-4} \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 1.3 Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα:

$$A = \{x / x \text{ γράμμα της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 6 = 5x\} \quad \Gamma = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x^2-9) = 0\} \quad \Delta = \{x \in \mathbb{N} / x^2 = x+6\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 16\}, \quad K = \{x \in \mathbb{N} / 2x+6 < 4\}, \quad Z = \{x \in \mathbb{Z}^* / x \text{ άρτιος με } -5 < x \leq 4\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x + 3 = 0\}, \quad \Theta = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 6\}$$

Άσκηση 1.4 Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$

Άσκηση 1.5 Ποιο από τα παρακάτω σύνολα είναι το κενό;

$$\text{i) } A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 9 \text{ και } 2x = 4\} \quad \text{ii) } B = \{x \in \mathbb{R} / x+8 = 8\}$$

Άσκηση 1.6 Με βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, \dots, 9\}$, θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{x \in \Omega / x \text{ περιττός}\} \text{ και } B = \{x \in \Omega / x \text{ διαιρέτης του } 6\}$$

α) Να παρασταθούν τα σύνολα A, B με αναγραφή των στοιχείων τους και να γίνει το διάγραμμα Venn.

β) Να βρείτε τα σύνολα: $A \cup B, A \cap B, A', (A')', A - B, (B - A)'$

γ) Να δείξετε ότι: $A \cap A' = \emptyset, (A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$

Άσκηση 1.7 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{\text{ψηφία του αριθμού } 231326\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{N} / 2x - 3 < 6\}$$

Να επαληθεύσετε τις σχέσεις:

$$\text{i) } (A \cap B) \subseteq A \quad \text{ii) } (A \cap B) \subseteq B \quad \text{iii) } A \subseteq (A \cup B) \quad \text{iv) } B \subseteq (A \cup B)$$

Άσκηση 1.8 Να συγκρίνετε τα σύνολα

α) $A = \{-1, 0, 1\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x\}$

β) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$ και $B = \{1, 3\}$

Άσκηση 1.9 Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{2, 3\}, B = \{3, 4\}$ τότε να αποδείξετε ότι

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{και} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Άσκηση 1.10 Δίνεται το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} / x \text{ λύση της εξίσωσης } x(x^2 - 1) = 0\}$

Να γράψετε όλα τα υποσύνολα του A .

Άσκηση 1.11 Έστω τα σύνολα $A = \{5, x + 1, 2x - 1\}$ και $B = \{9, x, 3x - 9\}$

Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ όταν:

$$\text{i. } A = B \quad \text{ii. } A \cap B = \{9, 15\} \quad \text{iii. } A = \{5, 3\} \quad \text{iv. } B = \{9, 6\}$$

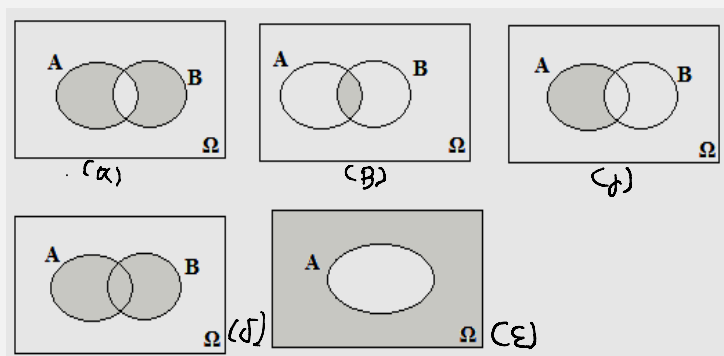
Άσκηση 1.12 Να βρείτε τα σύνολα A, B αν ισχύουν συγχρόνως:

$$\text{α) } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{β) } A \cap B = \{3, 4\} \quad \text{γ) } A \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset \quad \text{δ) } \{1, 2\} \cap B = \emptyset$$

Άσκηση 1.13 Αν $A = \{0, 3, 5\}, B = \{0\}, \Gamma = \{3, 5\}$ και $\Delta = \{5, 3\}$ ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές;

$$\text{i) } A \subseteq B, \quad \text{ii) } B \subseteq \Gamma, \quad \text{iii) } \Gamma \subseteq \Delta, \quad \text{iv) } \Delta \subseteq A$$

Άσκηση 1.14 Να βρείτε τα σκιασμένα σύνολα στο παρακάτω σχήμα αν $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 9\}, A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$



Λύση

Έστω Γ το αντίστοιχο σκιασμένο σύνολο σε καθεμιά από τις αντίστοιχες περιπτώσεις:

$$(\alpha) \text{ Είναι } \Gamma = A \cup B - (A \cap B) = \Omega - \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, \dots, 9\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$$

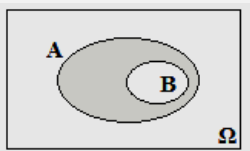
$$(\beta) \text{ Είναι } \Gamma = (A \cap B) = \{3, 4, 5\}$$

$$(\gamma) \text{ Είναι } \Gamma = A - B = A - (A \cap B) = A \cap B' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$$

$$(\delta) \text{ Είναι } \Gamma = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \Omega$$

$$(\epsilon) \text{ Είναι } \Gamma = A' = \{1, 2, 3, 4, 5\}' = \{6, 7, 8, 9\}$$

Άσκηση 1.15 Αν $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ και $B = \{2, 4, 6, 8\}$ να βρείτε το



παρακάτω σκιασμένο σύνολο:

Άσκηση 1.16 Να βρείτε το σύνολο A όταν ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\alpha) \{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$$

$$\beta) \{3, 4, 5, 6\} \subseteq A$$

$$\gamma) A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\delta) A \cap \{7, 8\} = \emptyset$$