

ΕΡΓΑΣΙΑ 11^η

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1ου ΒΑΘΜΟΥ

Ασκήσεις:

Άσκηση 11.1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3} \geq 1 + \frac{x-3}{4}$$

$$\beta) 4(x+1)^2 - (x+3)^2 < 3(x-2)^2$$

$$\gamma) 3(x+5) < 3x+17$$

$$\delta) 3(x-2) > x+2(x+1)$$

$$\epsilon) 4x+7 < x+3(x+2)$$

Άσκηση 11.2. Να λυθούν για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ανισώσεις:

$$\alpha) \lambda x > x+2$$

$$\beta) \lambda(x+\lambda) < 2x+3$$

$$\gamma) \lambda(x+5) > x-4$$

Άσκηση 11.3. Ποιοι φυσικοί αριθμοί επαληθεύουν τις ανισώσεις:

$$\alpha) 3x-5 \leq 13-3x,$$

$$\beta) \frac{x-1}{3} > \frac{x-3}{2}$$

Άσκηση 11.4. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\alpha) 2 - \frac{1-3x}{2} \geq 0 \quad \text{και} \quad \frac{x+2}{2} > \frac{4+3x}{5}$$

$$\beta) \frac{4x-3}{5} - x > \frac{6}{15} \quad \text{και} \quad \frac{x}{4} - \frac{x}{2} \leq \frac{5}{4}$$

Άσκηση 11.5. Η ανίσωση $\lambda^2 x < 3-2x$ είναι αδύνατη;

Άσκηση 11.6. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) |x-2| > 0$$

$$\beta) |x-2| \geq 0$$

$$\gamma) |x-2| < 0$$

$$\delta) |x-2| \leq 0$$

$$\epsilon) |x-2| > -4$$

$$\sigma\tau) |2x+3| > 7$$

$$\zeta) \left| x - \frac{1}{6} \right| < 1$$

$$\eta) \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{6}$$

$$\theta) -2 < x+3 < 4$$

Άσκηση 11.7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) |x-3| > 5$$

$$\beta) |-2x+3| \geq 2$$

$$\gamma) 6 - |x+3| \leq 2$$

$$\delta) \frac{|1-2x|-5}{2} \leq 6$$

$$\epsilon) \frac{8-|-x-1|}{2} < 2$$

$$\sigma\tau) |x^2-3| \leq 0$$

$$\zeta) ||x+2|+3| > 5$$

$$\eta) ||x+2|-3| < 2$$

Άσκηση 11.8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) |x-3| + |2x-6| > |5x-15| - 6$$

$$\beta) |x-1| + 8 < |5x-5| - |2-2x|$$

$$\gamma) |2x-1| + 2 - \frac{|6x-3|}{8} \geq \frac{|4-8x|+3}{5}$$

$$\delta) d(x, 2) - \frac{|x-2|-4}{15} > 1 - \frac{|4-2x|}{5}$$

Άσκηση 11.9. Αν $|x-4| \leq 1$ και $|y-7| \leq 2$ ποιες είναι οι τιμές που παίρνουν οι παραστάσεις: α) $x+y$ β) x^2-y γ) $x-2 \cdot \frac{y}{x} + 3$

Άσκηση 11.10. Να βρείτε πού συναληθεύουν οι ανισώσεις $|x-3| < 5$ και $|x-5| \geq 1$.

Άσκηση 11.11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) 1 < |x-3| < 3$$

$$\beta) 3 < |-2x+3| \leq 5$$

$$\gamma) 1 \leq |-2x+4| \leq 2$$

Άσκηση 11.12. Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $\sqrt{x^2-10x+25} < 3$ β) $\sqrt{x^2+4x+4} > 3$

Άσκηση 11.13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) |x| > x$$

$$\beta) |x| \geq x$$

$$\gamma) |x| \geq -x$$

$$\delta) |x| > -x$$

$$\epsilon) |x| \leq x$$

$$\sigma\tau) |x| \leq -x$$

$$\zeta) |x| < x$$

$$\eta) |x| < -x$$

Άσκηση 11.14. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) |2x-1| > 2x-1$$

$$\beta) |2x-1| \geq 2x-1$$

$$\gamma) |x^2-4| \geq -x^2+4$$

$$\delta) ||x|-2| > -|x|+2$$

$$\epsilon) |2x-1| < 2x-1$$

$$\sigma\tau) |2x-1| \leq 2x-1$$

$$\zeta) |x^2-4| \leq -x^2+4$$

$$\eta) ||x|-2| < -|x|+2$$

Άσκηση 11.15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) x^4 > 16$$

$$\beta) x^6 \geq 4^3$$

$$\gamma) (|x|-3)^4 \leq 2^{12}$$

$$\delta) 5x^8 > 5^{25}$$

Άσκηση 11.16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) |2x-3| = 2x-3$$

$$\beta) |x^2-3| = 3-x^2$$

$$\gamma) ||x|-3| = |x|-3$$

$$\delta) ||x-1|-3| = |x-1|-3$$

$$\epsilon) |2x-1|-2 + |2x-1|-2 = 0$$

Άσκηση 11.17. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{|x|-1}{|x|+2} < 4$$

$$\beta) \left| \frac{x}{|x|+1} \right| < \frac{1}{2}$$

Άσκηση 11.18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + |3\lambda - 1| = 0$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 1$

Άσκηση 11.19.

13312. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$. (Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. (Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο. (Μονάδες 7)

Άσκηση 11.20.

1243.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

Άσκηση 11.21.

1284.α) Να λύσετε την ανίσωση $|x + 4| \geq 3$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

Άσκηση 11.22.

1330.α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

Άσκηση 11.23.

12909. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$. (Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους. (Μονάδες 9)

Άσκηση 11.24

14319. Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση. (Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5)$ (Μονάδες 13)

Άσκηση 11.25

1406. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - (a+1)x + 4 + a$, $a \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (a-1)^2 - 16$. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του a το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)
- γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2 , τότε:
- i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 x_2$ των ριζών του συναρτήσει του a (Μονάδες 2)
- ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$ (Μονάδες 8)

Άσκηση 11.26

1416. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$. (Μονάδες 5)
- β) Έστω $\lambda \neq 0$.
- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)
- ii) Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$. (Μονάδες 10)

Άσκηση 11.27

1473.α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)
- ii) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)
- β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
- i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$. (Μονάδες 6)

Άσκηση 11.28

- 1521.α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$. (Μονάδες 10)
- β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.
- i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (Μονάδες 5)
- ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19. (Μονάδες 10)

Άσκηση 11.29

13474. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| \leq \sqrt{3}$ (1) και $3 - \frac{x+4}{2} < 0$ (2)

- α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 5)
- β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1). (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 7)
- δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους. (Μονάδες 8)

Άσκηση 11.30

14601. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, x, x^2$.

(Μονάδες 13)

Άσκηση 11.31

14753. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

(Μονάδες 5)

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση A χωρίς τις απόλυτες τιμές. $A = |2x - 3| - |4 - 3x|$.

(Μονάδες 10)

Άσκηση 11.32

14601. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, x, x^2$.

(Μονάδες 13)

Άσκηση 11.33

14650. α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 1| \leq 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Άσκηση 11.34

1367. α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Άσκηση 11.35

1374. α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$

(Μονάδες 9)

ii) $|1 - 2x| \geq 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

A n d r e a s P a n t e r i s