

ΕΡΓΑΣΙΑ 14η ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

14.1 Τι ονομάζουμε αντιστοιχία ή απεικόνιση

Έστω τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$ μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ανάμεσα στα στοιχεία των συνόλων, τις σχέσεις αυτές τις ονομάζουμε αντιστοιχίες.

Αν στα στοιχεία του συνόλου A , αντιστοιχίσουμε στοιχεία του συνόλου B λέμε ότι έχουμε μια αντιστοιχία από το A στο B και συμβολίζουμε $A \rightarrow B$, το σύνολο A ονομάζεται **σύνολο αναφοράς** και το σύνολο B **σύνολο αφίξεως**.

Παράδειγμα 1: Ας αντιστοιχίσουμε το:

$1 \rightarrow 1$
 $2 \rightarrow 4$
 $3 \rightarrow 9$
 $4 \rightarrow 16$

Δηλαδή κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του συνόλου B .

Παράδειγμα 2 μπορούμε προφανώς να κάνουμε ότι αντιστοιχία θέλουμε, ας αντιστοιχίσουμε το:

$1 \rightarrow 16$
 $2 \rightarrow 9$
 $3 \rightarrow 4$
 $4 \rightarrow 1$

Παράδειγμα 3 Δεν είναι αναγκαίο κάθε στοιχείο του A να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του B , μπορεί κάποια στοιχεία του A να μην αντιστοιχίζονται σε κανένα στοιχείο ή κάποιο στοιχείο του A να αντιστοιχίζεται σε παραπάνω από ένα στοιχεία του B .

$1 \rightarrow 1$
 $1 \rightarrow 4$
 $3 \rightarrow 9$

14.2 Τι ονομάζουμε ακολουθία

Ακολουθία είναι μία αντιστοιχία του συνόλου των φυσικών αριθμών στους πραγματικούς αριθμούς

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία όμως σε **κάθε φυσικό** αριθμό αντιστοιχεί μοναδικός πραγματικός αριθμός.

14.3 Συμβολισμοί:

- Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο φυσικός αριθμός 1 λέγεται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και συμβολίζεται με α_1 ή β_1 ή γ_1 ή κ.λ.π. ($1 \rightarrow \alpha_1$)
- Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο φυσικός αριθμός 2 λέγεται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και συμβολίζεται με α_2 ή β_2 ή γ_2 ή κ.λ.π. ($2 \rightarrow \alpha_2$)
- Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο φυσικός αριθμός n λέγεται **νιοστός όρος** της ακολουθίας και συμβολίζεται με α_n ή β_n ή γ_n ή κ.λ.π. ($n \rightarrow \alpha_n$)

14.4 Νιοστός όρος (α_n):

Ο νιοστός όρος (α_n) καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο αντιστοιχίζεται ο φυσικός αριθμός n σε ένα πραγματικό αριθμό.

Για παράδειγμα:

- Να αντιστοιχιστεί ο φυσικός αριθμός n στο τετράγωνο του αυξημένο κατά 1:
 $n \rightarrow n^2 + 1$, άρα $\alpha_n = n^2 + 1$
- Να αντιστοιχιστεί ο φυσικός αριθμός n στο διπλάσιο του ελαττωμένο κατά 3:
 $n \rightarrow 2n - 3$, άρα $\alpha_n = 2n - 3$

Ετσι λοιπόν ο νιοστός όρος είναι μια οποιαδήποτε έκφραση η οποία περιέχει πράξεις – δυνάμεις μεταξύ του n και αριθμών.

- **Διαβάζουμε:** ο νιοστός όρος της ακολουθίας ή ο γενικός όρος.
- **Όροι της ακολουθίας:** είναι οι πραγματικοί αριθμοί που προκύπτουν όταν αντικαταστήσουμε το n στον νιοστό της όρο με οποιοδήποτε φυσικό αριθμό.

Δηλαδή οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots$ και διαβάζουμε:

Πρώτος, δεύτερος, τρίτος, ..., κ-στός, ..., $n-1$ στος, n οστος, $n+1$ στος, ... ή

Πρώτος όρος, δεύτερος όρος, τρίτος όρος, ..., κ-όρος, ..., $n-1$ όρος, n όρος, $n+1$ όρος, ...

Ο όρος a_{v-1} είναι ο προηγούμενος του a_v και ο όρος a_{v+1} είναι ο επόμενος του a_v

Έτσι στην ακολουθία $a_v = 2v - 3, v \in \mathbb{N}^*$ για $v = 10$ έχουμε $a_{10} = 2 \cdot 10 - 3 = 17$ και διαβά-
ζουμε ο δέκατος όρος της ακολουθίας είναι το 17 .

• **Να προσέξουμε** να μην μπερδεύουμε τον $(a_v), v \in \mathbb{N}^*$ με τον v .

$$a_v = 2v - 3, v \in \mathbb{N}^*$$

Το v μας δείχνει τη θέση του όρου στη σειρά, και το (a_v) την τιμή του.

Για παράδειγμα το $a_7 = 32$,σημαίνει ότι ο έβδομος όρος της ακολουθίας είναι το 32 ή ότι ο έβδομος όρος της ακολουθίας έχει τιμή 32 .

• **Πότε ένα αριθμός β θα είναι όρος μιας ακολουθίας (a_v) ;**

Όταν η εξίσωση $a_v = \beta$ έχει λύση στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται η ακολουθία $a_v = 3v - 4$. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 41 και 57 είναι όροι της

Λύση

$$a_v = 41 \Leftrightarrow 3v - 4 = 41 \Leftrightarrow 3v = 45 \Leftrightarrow v = 15 \in \mathbb{N}$$

$$a_v = 57 \Leftrightarrow 3v - 4 = 57 \Leftrightarrow 3v = 61 \Leftrightarrow v = \frac{61}{3} \notin \mathbb{N}$$

Επομένως ο αριθμός 41 είναι ο 15^{ος} όρος της, ενώ ο 57 δεν είναι όρος της ακολουθίας $a_v = 3v - 4$

14.5 Άθροισμα των n -πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_v)

Το άθροισμα των n -πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_v) συμβολίζεται με S_v και είναι:

$$S_v = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_v$$

Αφού $S_{v-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{v-1}$ θα είναι

$$S_v = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{v-1} + a_v = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{v-1}}_{S_{v-1}} + a_v$$

$$\text{Άρα } S_v = S_{v-1} + a_v \Leftrightarrow a_v = S_v - S_{v-1}$$

Παράδειγμα 5.

Σε μία ακολουθία ισχύει: $S_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{v-1} + \alpha_v = v^2 + v$.

Να βρείτε τον νιοστό όρο της α_v .

Λύση

$$\text{Είναι } S_v = v^2 + v \text{ άρα } S_{v-1} = (v-1)^2 + v-1 = v^2 - 2v + 1 + v - 1 = v^2 - v$$

$$\text{Επομένως } \alpha_v = S_v - S_{v-1} = v^2 + v - (v^2 - v) = 2v$$

Ακολουθίες με αναδρομικό τύπο:

Πολλές φορές δεν ξέρουμε τον γενικό όρο μιας ακολουθίας, αλλά μια σχέση μεταξύ των όρων $\alpha_{v-1}, \alpha_v, \alpha_{v+1}$ κ.λ.π. και επαρκείς αρχικούς όρους ώστε να μπορούμε να υπολογίζουμε τον οποιοδήποτε όρο της.

Παράδειγμα 6.

Δίνεται η ακολουθία με $\alpha_1 = 5$ και $\alpha_{v+1} = 2\alpha_v + 1$.

Για $v = 1$: $\alpha_2 = 2\alpha_1 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$, άρα $\alpha_2 = 11$

Για $v = 2$: $\alpha_3 = 2\alpha_2 + 1 = 2 \cdot 11 + 1 = 23$, άρα $\alpha_3 = 23$

και ούτω καθεξής

14.6 Μετατροπή του γενικού τύπου σε αναδρομικό:

• Θέτουμε στον γενικό όρο όπου v το $v+1$ και βρίσκουμε τον όρο α_{v+1}

• Εκφράζουμε τον όρο α_{v+1} συναρτήσει των α_v και v . Πολλές φορές μας εξυπηρετεί να βρούμε την διαφορά $\alpha_{v+1} - \alpha_v$ ή το πηλίκο $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v}$

Παράδειγμα 7.

Να ορίσετε αναδρομικά τις παρακάτω ακολουθίες.

α) $\alpha_v = 3v - 4$

β) $\alpha_v = 3 \cdot 2^v$

Λύση

α) $\alpha_v = 3v - 4$

1^{ος} τρόπος: Έχουμε $\alpha_{v+1} = 3(v+1) - 4 = 3v + 3 - 4 = 3v - 1 = 3v - 4 + 3 = \alpha_v + 3$

Οπότε η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $\alpha_1 = -1, \alpha_{v+1} = \alpha_v + 3$

2^{ος} τρόπος: Βρίσκουμε την διαφορά $\alpha_{v+1} - \alpha_v = 3(v+1) - 4 - 3v + 4 = 3v + 3 - 4 - 3v + 4 = 3$

$$\text{Άρα } \alpha_{v+1} - \alpha_v = 3 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = \alpha_v + 3$$

Οπότε η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $\alpha_1 = -1, \alpha_{v+1} = \alpha_v + 3$

$$\beta) \alpha_v = 3 \cdot 2^v - 1$$

Επειδή στον γενικό όρο έχουμε μόνο δύναμη μας συμφέρει να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v}$

$$\text{Έχουμε } \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{3 \cdot 2^{v+1}}{3 \cdot 2^v} = \frac{3 \cdot 2^v \cdot 2}{3 \cdot 2^v} = 2$$

$$\text{Άρα } \alpha_{v+1} = 2 \cdot \alpha_v$$

Οπότε η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $\alpha_1 = 5, \alpha_{v+1} = 2 \cdot \alpha_v$

Ασκήσεις:

$$14.1 \alpha) \text{ Αν } \alpha_v = \frac{2v}{v+1}, \text{ να δείξετε ότι } \alpha_{v+1} > \alpha_v.$$

$$\beta) \text{ Αν } \alpha_v = \frac{2v}{v^2+1}, \text{ να δείξετε ότι } \alpha_{v+1} < \alpha_v.$$

$$14.2. \text{ Να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας } \alpha_v = |9v+3| - |9v-3|$$

$$14.3. \text{ Δίνεται η ακολουθία } (\alpha_v) \text{ με γενικό όρο } \alpha_v = v^2 - 4v, v \in \mathbb{N}^*$$

α) Να βρείτε αν υπάρχει, ποιος όρος της ισούται με 15 και ποιος με 788.

β) Να βρείτε τον πρώτο όρο της που ξεπερνάει το 3.

$$14.4. \text{ Δίνεται η ακολουθία } (\alpha_v) \text{ με γενικό όρο } \alpha_v = 2v^2 - 7v$$

α) Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας (α_v) .

β) Να βρείτε ποιοι όροι της ακολουθίας (α_v) επαληθεύει την σχέση $0 < \alpha_{v+1} - \alpha_v < 5$.

$$14.5. \text{ Δίνεται η ακολουθία } (\alpha_v) \text{ με γενικό όρο } \alpha_v = 2v - 7, v \in \mathbb{N}^*$$

α) Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας (α_v) .

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{v+1} - \alpha_v = 2$

γ) Να ορίσετε την ακολουθία αναδρομικά

14.6. Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό όρο $\alpha_n = 2^n - 3, n \in \mathbb{N}^*$

α) Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας (α_n) .

β) Να ορίσετε την ακολουθία αναδρομικά

14.6.13056. (Θέμα 4^ο) Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, να παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

1	3	6	10	

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*$

α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

(Μονάδες 10)