

ΕΡΓΑΣΙΑ 15η

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

15.1 Ορισμός

• Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν και μόνο αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Ο αριθμός αυτός λέγεται **διαφορά της προόδου** και συμβολίζεται με ω

• Μια ακολουθία (α_n) είναι **αριθμητική πρόοδος** με **διαφορά ω** , αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega$ ή $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
(αναδρομικός τύπος της ακολουθίας)

Οπότε αν σε μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και την διαφορά της ω , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον οποιοδήποτε όρο της.

15.2 Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$$

Παράδειγμα 1: Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $1, 5, 9, \dots$ να βρείτε:

α) Τον 18^ο όρο β) Τον όρο που είναι ίσος με 185 γ) Τον νιοστό όρο

Λύση

Στην αριθμητική πρόοδο $1, 5, 9, \dots$ έχουμε $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 5 - 1 = 4$

α) Είναι $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$, άρα $\alpha_{18} = \alpha_1 + (18-1)\omega = 1 + 17 \cdot 4 = 1 + 68 = 69$

Άρα ο 18^{ος} είναι 69

β) $\alpha_n = 185 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 185 \Leftrightarrow 1 + (n-1)4 = 185 \Leftrightarrow 4n - 3 = 185 \Leftrightarrow 4n = 188 \Leftrightarrow n = 27$

Άρα είναι ο 27^{ος} όρος

γ) Ο νιοστός της όρος είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Rightarrow \alpha_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3 \Leftrightarrow \alpha_n = 4n - 3$$

Σχόλια:

i) Προφανώς $\alpha_n - \alpha_m = (n-m)\omega$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$

Πράγματι

$$\alpha_v - \alpha_\mu = \alpha_1 + (v-1)\omega - [\alpha_1 + (\mu-1)\omega] = \alpha_1 + (v-1)\omega - \alpha_1 - (\mu-1)\omega = (v-1-\mu+1)\omega = (v-\mu)\omega$$

ii) Σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω και v πρώτους όρους τους

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v$$

οι όροι α_1, α_v λέγονται **άκροι όροι**, και τα ζεύγη των όρων

$(\alpha_2, \alpha_{v-1}), (\alpha_3, \alpha_{v-2}), \dots, (\alpha_k, \alpha_{v-k+1}), k \in \mathbb{N}^*$ και $k < v$ λέμε ότι **ισαπέχουν** από τους άκρους όρους α_1, α_v

iii) Το άθροισμα των όρων που **ισαπέχουν** από τους άκρους όρους, ισούνται με το άθροισμα των άκρων όρων, δηλαδή $\alpha_k + \alpha_{v-k+1} = \alpha_1 + \alpha_v$

Πράγματι

$$\begin{aligned} \alpha_k + \alpha_{v-k+1} &= \alpha_1 + (k-1)\omega + \alpha_1 + (v-k+1-1)\omega = \alpha_1 + \alpha_1 + (k-1+v-k)\omega = \\ &= \alpha_1 + \underbrace{\alpha_1 + (v-1)\omega}_{\alpha_v} = \alpha_1 + \alpha_v \end{aligned}$$

Οπότε $\alpha_k + \alpha_{v-k+1} = \alpha_1 + \alpha_v$

15.3 Αριθμητικός μέσος.

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$2\beta = \alpha + \gamma \text{ ή ισοδύναμα } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

• Αν για αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, τότε ο αριθμός β ονομάζεται αριθμητικός μέσος των α, γ

Παράδειγμα 2.

α) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών: -12 και 36

β) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $-5x+7$ και 9 είναι ο $-x+2$

Λύση

α) Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών -12 και 36 είναι ο αριθμός $\frac{-12+36}{2} = \frac{24}{2} = 12$

β) Πρέπει $\frac{-5x+7+9}{2} = -x+2 \Leftrightarrow -5x+16 = 2(-x+2) \Leftrightarrow -5x+16 = -2x+4 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

Παράδειγμα 3.

Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν διαφορά 4 και ο αριθμητικός μέσος τους είναι 12.

Λύση

Έστω x, y οι ζητούμενοι αριθμοί, τότε:

$$\begin{cases} x-y=4 \\ \frac{x+y}{2}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x+y=24 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=28 \Leftrightarrow x=14$$

Για $x=14$: $x-y=4 \Leftrightarrow 14-y=4 \Leftrightarrow y=10$

15.4 Άθροισμα n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου.

Το άθροισμα των n -πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) συμβολίζεται όπως είπαμε με S_n και είναι:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που η ακολουθία (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος ι-

σχύει: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ (1) ή $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\omega]$ (2)

Σχόλια:

i). Θα χρησιμοποιούμε τον τύπο (1) όταν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο (a_1) και τον νιοστό όρο (a_n) της προόδου, και τον τύπο (2) όταν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο (a_1) και την διαφορά ω της προόδου

ii) Είναι $S_n - S_{n-1} = a_n$

iii) Αν ζητείται το άθροισμα S των διαδοχικών όρων, $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$

τότε: $S = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n = S_n - S_{k-1}$

Παράδειγμα 4.

Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 50 όρων των αριθμητικών προόδων.

α) $5, 7, 9, \dots$

β) $-9, -11, -13, \dots$

Λύση

α) $5, 7, 9, \dots$

Είναι $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 2$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_v = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

Για $v = 50$ έχουμε:

$$S_{50} = \frac{50}{2} \cdot [2\alpha_1 + (50-1)\omega] = 5 \cdot (2 \cdot 5 + 49 \cdot 2) = 25 \cdot (10 + 98) = 5 \cdot 108 = 540$$

β) $-9, -7, -5, \dots$

Είναι $\alpha_1 = -9$ και $\omega = -2$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_v = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

Για $v = 50$ έχουμε:

$$S_{50} = \frac{50}{2} \cdot [2\alpha_1 + (50-1)\omega] = 25 \cdot (2 \cdot (-9) + 49 \cdot (-2)) = 25 \cdot (-18 - 98) = 25 \cdot (-116) = -2900$$

Παράδειγμα 5.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $5, 3, 1, (-1) + \dots$

α) Να βρείτε το άθροισμα $5 + 3 + 1 + (-1) + \dots - 41$

β) Να βρείτε το άθροισμα $\alpha_{10} + \alpha_{11} + \dots + \alpha_{30}$

Λύση

Είναι $\alpha_1 = 5$ και $\omega = -2$

α) Θα βρούμε το πλήθος των προσθετέων.

Έστω v το πλήθος τους, τότε:

$$\alpha_v = -41 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = -41 \Leftrightarrow 5 + (v-1)(-2) = -41 \Leftrightarrow 7 - 2v = -41 \Leftrightarrow 2v = 48 \Leftrightarrow v = 24,$$

Άρα $\alpha_{24} = -41$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_v = \frac{v}{2} (\alpha_1 + \alpha_v)$

Για $v = 24$ έχουμε: $S_{24} = \frac{24}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{24}) = 12 \cdot (5 - 41) = 12 \cdot (-36) = -432$

β) Είναι $S = \alpha_{10} + \alpha_{11} + \dots + \alpha_{30} = S_{30} - S_9 = -720 - (-27) = -720 + 27 = -693$.

Γιατί:

$$S_{30} = \frac{30}{2} \cdot [2\alpha_1 + (30-1)\omega] = 15 \cdot (2 \cdot 5 + 29 \cdot (-2)) = 15 \cdot (10 - 58) = 15 \cdot (-48) = -720$$

και

$$S_9 = \frac{9}{2} \cdot [2\alpha_1 + (9-1)\omega] = \frac{9}{2} \cdot (2 \cdot 5 + 8 \cdot (-2)) = \frac{9}{2} \cdot (10 - 16) = \frac{9}{2} \cdot (-6) = -27$$

15.5 Πρόβλημα παρεμβολής όρων .

Το πρόβλημα: Δίνονται δύο αριθμοί α και β και θέλουμε να βρούμε n αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι ζητούμενοι αριθμοί, θέλουμε οι αριθμοί $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n, \beta$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Οι αριθμοί αυτοί είναι $n+2$ το πλήθος και η αριθμητική πρόοδος έχει $\alpha_1 = \alpha$ και $\alpha_{n+2} = \beta$, οπότε για να βρούμε τους αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$ αρκεί να εκφράσουμε τη διαφορά ω συναρτήσει των α, β, n .

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$

Θέτουμε όπου n το $n+2$ και έχουμε:

$$\alpha_{n+2} = \alpha_1 + (n+2-1)\omega \Leftrightarrow \beta = \alpha + (n+1)\omega \Leftrightarrow \beta - \alpha = (n+1)\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{\beta - \alpha}{n+1}$$

Επομένως αφού ξέρουμε τον πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha$ και τη διαφορά $\omega = \frac{\beta - \alpha}{n+1}$, μπορούμε να βρούμε τον οποιοδήποτε όρο της.

Παράδειγμα 6.

Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 να παρεμβάλλεται 10 αριθμούς έτσι ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους μια αριθμητικής προόδου.

Λύση

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ οι ζητούμενοι αριθμοί, θέλουμε οι αριθμοί $3, x_1, x_2, \dots, x_{10}, 80$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Οι αριθμοί αυτοί είναι 12 το πλήθος και η αριθμητική πρόοδος έχει $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{12} = 80$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$

$$\text{Για } n = 12 \text{ έχουμε: } \alpha_{12} = \alpha_1 + (12-1)\omega \Leftrightarrow 80 = 3 + (11)\omega \Leftrightarrow 77 = 11\omega \Leftrightarrow \omega = 7$$

Άρα $x_1 = a_1 + \omega = 3 + 7 = 10$, $x_2 = x_1 + \omega = 10 + 7 = 17$, $x_3 = 24$, $x_4 = 31$, $x_5 = 38$, $x_6 = 45$, $x_7 = 52$
 $x_8 = 59$, $x_9 = 66$ και $x_{10} = 73$

Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73

15.6 Βασικές κατηγορίες ασκήσεων .

Κατηγορία 1^η : "Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο" σημαίνει να βρούμε τα a_1 και ω .

Παράδειγμα 7

Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία είναι $a_5 = 19$ και $a_{11} = -23$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν υπάρχει όρος της προόδου ο οποίος είναι πενταπλάσιος του τρίτου όρου της.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} a_5 = 19 \\ a_{11} = -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 4\omega = 19 \\ a_1 + 10\omega = -23 \end{cases} \Rightarrow (\text{αφαιρώ κατά μέλη})$$

$$4\omega - 10\omega = 19 - (-23) \Leftrightarrow -6\omega = 42 \Leftrightarrow \omega = -7$$

$$\text{Για } \omega = -7 \quad a_1 + 4\omega = 19 \Leftrightarrow a_1 + 4(-7) = 19 \Leftrightarrow a_1 - 28 = 19 \Leftrightarrow a_1 = 47$$

• Θα βρούμε τον ν-οστό όρο της προόδου,

$$\text{είναι } a_v = a_1 + (v-1)\omega = 47 + (v-1)(-7) = 47 - 7v + 7 = -7v + 54, \text{ άρα } a_v = -7v + 54$$

• Θα εξετάσουμε αν υπάρχει $v \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$a_v = 5a_3 \Leftrightarrow -7v + 54 = 5(a_1 + 2\omega) \Leftrightarrow -7v + 54 = 5(47 - 14) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7v = 235 - 70 - 54 \Leftrightarrow v = -\frac{111}{7} \notin \mathbb{N}$$

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου ο οποίος είναι πενταπλάσιος του τρίτου όρου της

Παράδειγμα 8

Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία είναι $a_4 = 15$ και $a_{20} = 79$.

Στη συνέχεια να εξετάσετε αν υπάρχει όρος της προόδου ο οποίος να ισούται με 47.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} \alpha_4 = 15 \\ \alpha_{20} = 79 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\omega = 15 \\ \alpha_1 + 19\omega = 79 \end{cases} \Rightarrow (\text{αφαιρώ κατά μέλη})$$

$$3\omega - 19\omega = 15 - 79 \Leftrightarrow -16\omega = -64 \Leftrightarrow \omega = 4$$

$$\text{Για } \omega = 4 : \alpha_1 + 3\omega = 15 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3 \cdot 4 = 15 \Leftrightarrow \alpha_1 = 3$$

• Θα βρούμε τον ν-οστό όρο της προόδου, είναι

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega = 3 + (v-1)4 = 3 + 4v - 4 = 4v - 1, \text{ άρα } \alpha_v = 4v - 1$$

• Θα εξετάσουμε αν υπάρχει $v \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\alpha_v = 47 \Leftrightarrow 4v - 1 = 47 \Leftrightarrow 4v = 48 \Leftrightarrow v = 12 \in \mathbb{N}. \text{ Άρα ο } 12^{\text{ος}} \text{ όρος της προόδου ισούται με } 47.$$

Παράδειγμα 9.

Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύουν οι σχέσεις $S_{10} = -30$ και $S_{20} = 140$

α) Να ορίσετε την πρόοδο

β) Να βρείτε το άθροισμα των τριάντα πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

α) Αφού θέλουμε να βρούμε τον πρώτο όρο α_1 και την διαφορά ω της προόδου, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $S_v = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

Έχουμε:

$$\begin{cases} S_{10} = -30 \\ S_{20} = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) = -30 \\ \frac{20}{2}(2\alpha_1 + 19\omega) = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(2\alpha_1 + 9\omega) = -30 \\ 10(2\alpha_1 + 19\omega) = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 9\omega = -6 \\ 2\alpha_1 + 19\omega = 14 \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε: $10\omega = 20 \Leftrightarrow \omega = 2$

$$\text{Για } \omega = 2 : 2\alpha_1 + 9\omega = -6 \Rightarrow 2\alpha_1 + 9 \cdot 2 = -6 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -18 - 6 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = -24 \Leftrightarrow \alpha_1 = -12$$

$$\beta) S_{30} = \frac{30}{2}(2\alpha_1 + 29\omega) = 15(2(-12) + 29 \cdot 2) = 15(-24 + 58) = 15 \cdot 34 = 510$$

Παράδειγμα 10.

Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύουν οι σχέσεις $\alpha_7 = 28$ και $S_{17} = 578$

α) Να ορίσετε την πρόοδο

β) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{18} + \alpha_{19} + \dots + \alpha_{30}$.

Λύση

Αφού θέλουμε να βρούμε τον πρώτο όρο α_1 και την διαφορά ω της προόδου, θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$ και $S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

α) Έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha_7 = 28 \\ S_{17} = 578 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 28 \\ \frac{17}{2}(2\alpha_1 + 16\omega) = 578 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 28 \\ 17(\alpha_1 + 8\omega) = 17 \cdot 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 28 \\ \alpha_1 + 8\omega = 34 \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε: $2\omega = 6 \Leftrightarrow \omega = 3$

Για $\omega = 3$: $\alpha_1 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6 \cdot 3 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 = 10$

β) Είναι: $S = \alpha_{18} + \alpha_{19} + \dots + \alpha_{30} = S_{30} - S_{17}$

$$S_{30} = \frac{30}{2}(2\alpha_1 + 29\omega) = 15(2 \cdot 10 + 29 \cdot 3) = 15 \cdot 107 = 1605$$

Οπότε $S_{30} - S_{17} = 1605 - 578 = 1027$

Παράδειγμα 11.

Έστω η αριθμητική πρόοδος $-5, -1, 3, \dots$

α) Να βρείτε τον τελευταίο όρο της προόδου που δεν υπερβαίνει το 80

β) Να βρείτε τον πρώτο της προόδου που υπερβαίνει το 60.

Λύση

Η αριθμητική πρόοδος έχει $\alpha_1 = -5$ και $\omega = 4$

α) Είναι $\alpha_v < 80 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega < 80 \Leftrightarrow -5 + (v-1)4 < 80 \Leftrightarrow 4v - 9 < 80 \Leftrightarrow v < \frac{89}{4} \Leftrightarrow v < 22\frac{1}{4}$

Άρα είναι ο 22^{ος} όρος.

β) Είναι $\alpha_v > 60 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega > 60 \Leftrightarrow -5 + (v-1)4 > 60 \Leftrightarrow 4v - 9 > 60 \Leftrightarrow v > \frac{69}{4} \Leftrightarrow v > 17\frac{1}{4}$

Άρα είναι ο 18^{ος} όρος.

Κατηγορία 2^η : Διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου**Παράδειγμα 12.**

Αν οι αριθμοί $\alpha = 3x + 5$, $\beta = x - 1$, $\gamma = x + 3$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου να βρείτε:

α) την τιμή του x .

β) τον α_5 αν ο αριθμός $\alpha = 3x + 5$ είναι ο 17ος όρος της.

Λύση

α) Αφού οι αριθμοί $\alpha = 3x + 5$, $\beta = x - 1$, $\gamma = x + 3$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2(x - 1) = 3x + 5 + x + 3 \Leftrightarrow 2x - 2 = 4x + 8 \Leftrightarrow 2x = -10 \Leftrightarrow x = -5$$

β) για $x = -5$: $\alpha_{17} = \alpha = 3x + 5 = 3(-5) + 5 = -10$, άρα $\alpha_{17} = -10$ και

$$\omega = \beta - \alpha = x - 1 - (3x + 5) = -2x - 6 = -2(-5) - 6 = 4, \text{ άρα } \omega = 4$$

$$\text{Ακόμα } \alpha_{17} - \alpha_5 = 12\omega \Leftrightarrow -10 - \alpha_5 = 12 \cdot 4 \Leftrightarrow \alpha_5 = -10 - 48 = -58$$

Κατηγορία 3^η : Να δείξουμε ότι μια ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος

Για να δείξουμε ότι μια ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \text{σταθερό (ανεξάρτητο του } n)$$

Η σταθερή αυτή διαφορά θα είναι η διαφορά ω της προόδου.

Σχόλιο: Αν δίνεται το άθροισμα (S_n) των n πρώτων όρων της, τότε βρίσκουμε τον νιοστό όρο (α_n) από τη σχέση $\alpha_n = S_n - S_{n-1}$

Παράδειγμα 13.

Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = 3n - 4$, να δείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος (Α.Π.).

Λύση

Είναι $\alpha_{n+1} - \alpha_n = 3(n+1) - 4 - (3n - 4) = 3n + 3 - 4 - 3n + 4 = 3$, άρα η ακολουθία $\alpha_n = 3n - 4$, είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 3$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = 3 - 4 = -1$

Κατηγορία 4^η:

Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου

Παράδειγμα 14.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, \dots$

α) Να βρείτε ποιος όρος της ισούται με 68

β) Να βρείτε το άθροισμα $S = 2 + 5 + 8 + \dots + 155$

Λύση

α) Είναι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 5 - 2 = 3$ άρα $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Rightarrow \alpha_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$

$\alpha_n = 68 \Leftrightarrow 3n - 1 = 68 \Leftrightarrow 3n = 69 \Leftrightarrow n = 23$, άρα $\alpha_{23} = 68$

β) Πρόκειται για άθροισμα n -πρώτων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$
Για να βρούμε το άθροισμα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των όρων του.

Έστω n το πλήθος αυτών, τότε θα είναι $\alpha_n = 155 \Leftrightarrow 3n - 1 = 155 \Leftrightarrow 3n = 156 \Leftrightarrow n = 52$

Άρα το πλήθος των όρων είναι $n = 52$ και $\alpha_{52} = 155$

$$S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n) \text{ και } S = S_{52} = \frac{52}{2}(\alpha_1 + \alpha_{52}) = 26(2 + 155) = 26 \cdot 157 = 4022$$

Παράδειγμα 15.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $2, 8, 14, \dots$

Να βρείτε πόσους όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε για να έχουν άθροισμα 850

Λύση

Είναι $\alpha_1 = 2, \omega = 6$

$$S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega] \Rightarrow S_n = 850 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega] = 850 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2 \cdot 2 + (n-1)6] = 850 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n[2 + (n-1)3] = 850 \Leftrightarrow n(3n-1) = 850 \Leftrightarrow 3n^2 - n - 850 = 0$$

$$\Delta = 1 + 12 \cdot 850 = 1 + 10.200 = 10.201 = (101)^2$$

$$\text{Άρα } n = \frac{1 \pm 101}{6} = \begin{cases} \frac{1+101}{6} = \frac{102}{6} = 17 \in \mathbb{N} \\ \frac{1-101}{6} = \frac{-100}{6} = \frac{-50}{3} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Οπότε το άθροισμα των 17 πρώτων όρων της προόδου έχει άθροισμα 850

Παράδειγμα 16.

Να βρείτε το άθροισμα:

α) των πρώτων 100 θετικών άρτιων

β) όλων των περιττών αριθμών μεταξύ 16 και 300.

Λύση

α) Οι θετικοί άρτιοι είναι οι αριθμοί: $2, 4, 6, \dots$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 2$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $S_v = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega]$

Για $v = 100$ έχουμε:

$$S_{100} = \frac{100}{2} \cdot [2\alpha_1 + (100-1)\omega] = 50 \cdot (2 \cdot 2 + 99 \cdot 2) = 50 \cdot (4 + 198) = 50 \cdot 202 = 10.100$$

β) Οι περιττοί μεταξύ 16 και 300 είναι οι αριθμοί: $17, 19, \dots, 299$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 17$ και $\omega = 2$

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των όρων του.

Έστω v το πλήθος αυτών, τότε θα είναι

$$\alpha_v = 299 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1)\omega = 299 \Leftrightarrow 17 + (v-1)2 = 299 \Leftrightarrow 2v = 299 - 15 \Leftrightarrow v = 142$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_v = \frac{v}{2} (\alpha_1 + \alpha_v)$

$$\text{Για } v = 142 \text{ έχουμε: } S_{142} = \frac{142}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{142}) = 71 \cdot (17 + 299) = 71 \cdot (316) = 22.446$$

Παράδειγμα 17.

Να βρείτε το άθροισμα:

α) των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 1 και 199

β) των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 3 και του 5

γ) των ακεραίων από 1 μέχρι 200 που δεν είναι πολλαπλάσια του 3 ή του 4

Λύση

α) Τα πολλαπλάσια του 5 μεταξύ 1 και 199 είναι οι αριθμοί: $5, 10, \dots, 195$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 5$

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των όρων του.

Έστω n το πλήθος αυτών, τότε θα είναι

$$\alpha_n = 195 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 195 \Leftrightarrow 5 + (n-1)5 = 195 \Leftrightarrow 5n = 195 \Leftrightarrow n = 39$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$

$$\text{Για } n = 39 \text{ έχουμε: } S_{39} = \frac{39}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{39}) = \frac{39}{2} \cdot (5 + 195) = \frac{39}{2} \cdot (200) = 39 \cdot 100 = 39100$$

β) Έστω Σ το ζητούμενο άθροισμα, Σ_1 το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200, Σ_2 το άθροισμα των πολλαπλασίων 3 και Σ_3 το άθροισμα των πολλαπλασίων του 5
Τότε το ζητούμενο άθροισμα είναι $\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3$.

Οι ακέραιοι 1 μέχρι 200 είναι οι αριθμοί $1, 2, \dots, 200$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega]$

Για $n = 200$ έχουμε:

$$\Sigma_1 = S_{200} = \frac{200}{2} \cdot [2\alpha_1 + (200-1)\omega] = 100 \cdot (2 \cdot 1 + 199 \cdot 1) = 100 \cdot (201) = 20.100$$

- Τα κοινά πολλαπλάσια του 3 και του 5 μεταξύ του 1 και του 200 είναι οι αριθμοί $15, 30, 45, \dots, 195$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 15$ και $\omega = 15$

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των όρων του.

Έστω n το πλήθος αυτών, τότε θα είναι

$$\alpha_n = 195 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 195 \Leftrightarrow 15 + (n-1) \cdot 15 = 195 \Leftrightarrow 15n = 195 \Leftrightarrow n = 13$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$

$$\text{Για } n = 13 \text{ έχουμε: } \Sigma_2 = S_{13} = \frac{13}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{13}) = \frac{13}{2} \cdot (15 + 195) = \frac{13}{2} \cdot (210) = 13 \cdot 105 = 4.095$$

$$\text{Επομένως } \Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2 = 20.100 - 4.095 = 16.005$$

γ) Έστω Σ το ζητούμενο άθροισμα, Σ_1 το άθροισμα των ακεραίων από 1 μέχρι 200, Σ_2 το άθροισμα των πολλαπλασίων 3 και Σ_3 το άθροισμα των πολλαπλασίων του 4

Τότε το ζητούμενο άθροισμα δεν είναι $\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3$, διότι τα κοινά πολλαπλάσια του 3 και του 4 που είναι οι αριθμοί: 12, 24, ..., 192 αφαιρούνται δύο φορές.

Έστω Σ_4 το άθροισμα των πολλαπλασίων του 12, τότε $\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3 + \Sigma_4$

Από το ερώτημα (β) έχουμε $\Sigma_1 = 20.100$

- Τα πολλαπλάσια του 3 μεταξύ 1 και 199 είναι οι αριθμοί: 3, 16, ..., 198 και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 3$

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των όρων του.

Έστω n το πλήθος αυτών, τότε θα είναι

$$\alpha_n = 198 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 198 \Leftrightarrow 3 + (n-1)3 = 198 \Leftrightarrow 3n = 198 \Leftrightarrow n = 66$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$

$$\text{Για } n = 66 \text{ έχουμε: } S_{66} = \frac{66}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{66}) = 33 \cdot (3 + 198) = 33 \cdot (201) = 6.633$$

$$\text{Άρα } \Sigma_2 = S_{66} = 6.633$$

- Τα πολλαπλάσια του 4 μεταξύ 1 και 199 είναι οι αριθμοί: 4, 8, ..., 196 και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 4$

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των όρων του.

Έστω n το πλήθος αυτών, τότε θα είναι

$$\alpha_n = 196 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 196 \Leftrightarrow 4 + (n-1)4 = 196 \Leftrightarrow 4n = 196 \Leftrightarrow n = 49$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$

$$\text{Για } n = 49 \text{ έχουμε: } S_{49} = \frac{49}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{49}) = \frac{49}{2} \cdot (4 + 196) = \frac{49}{2} \cdot (200) = 49 \cdot 100 = 4.900$$

$$\text{Άρα } \Sigma_3 = S_{49} = 4.900$$

- Τα κοινά πολλαπλάσια του 3 και του 4 είναι οι αριθμοί: 12, 24, ..., 192 και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 12$

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των όρων του.

Έστω n το πλήθος αυτών, τότε θα είναι

$$\alpha_n = 192 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 192 \Leftrightarrow 12 + (n-1)12 = 192 \Leftrightarrow 12n = 192 \Leftrightarrow n = 16$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$

$$\text{Για } n = 16 \text{ έχουμε: } S_{16} = \frac{16}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{16}) = 8 \cdot (12 + 192) = 8 \cdot (204) = 1.632$$

$$\text{Άρα } \Sigma_4 = S_{16} = 1.632$$

$$\text{Οπότε } \Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3 + \Sigma_4 = 20.100 - 6.033 - 4.900 + 1.632 = 10.199$$

Κατηγορία 5^η: Προβλήματα

Παράδειγμα 18.

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Λύση

Οι σειρές των καθισμάτων αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$

α) Θα βρούμε τον n -οστό όρο της προόδου, είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega = 120 + (n-1) \cdot 20 = 120 + 20 \cdot n - 20 = 20 \cdot n + 100, \text{ άρα } \alpha_n = 20n + 100$$

β) Η τελευταία σειρά είναι η 10^η και $\alpha_{10} = 20 \cdot 10 + 100 = 200 + 100 = 300$

Άρα η τελευταία σειρά έχει 300 καθίσματα.

γ) Το πλήθος των καθισμάτων ισούται με το άθροισμα των όρων της αριθμητικής προόδου.

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$

$$\text{Για } n = 10 \text{ έχουμε: } S_{10} = \frac{10}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5 \cdot (120 + 300) = 5 \cdot 420 = 2.100$$

Ασκήσεις:

15.1. Αν η διαφορά μιας αριθμητικής προόδου, είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 7x + 10 = 0$ και ο πρώτος όρος της είναι η μικρότερη να βρείτε τον a_{20} .

15.2. Ποιος όρος της ακολουθίας 1, 5, 9, ... ισούται με 309;

15.3. Ένας μαθητής ύψους 1,7m στέκεται μπροστά σε μία σκάλα κάθε σκαλοπάτι της οποίας έχει ύψος 18cm.

α) Ποιο είναι το πρώτο σκαλοπάτι που βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο του μαθητή;

β) Υπάρχει σκαλοπάτι σε ύψος 72cm από το έδαφος;

15.4. Να ορίσετε την αριθμητική πρόοδο για την οποία ισχύουν: $a_1 + a_5 = 16$ και $a_2 + a_6 = 22$

15.5. Δίνεται η ακολουθία 7, 4, 1, ...

α) Να δείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου και τον a_8 .

15.6. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 3, 8, 13, ...

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο που υπερβαίνει το 135.

β) Να βρείτε τον τελευταίο όρο που είναι μικρότερος του 78.

15.7. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $(\alpha + \beta)^2$, $\alpha^2 + \beta^2$, $(\alpha - \beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

15.8. Πόσοι όροι της προόδου 1, 5, 9, ... έχουν άθροισμα 19.900;

15.9. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $a_1 = 3$ και $\omega = 7$.

α) Να βρείτε πόσοι όροι της δίνουν άθροισμα 679.

β) Ποιος είναι ο τελευταίος της όρος;

15.10. Να ορίσετε την αριθμητική πρόοδο για την οποία: $S_{20} = 610$ και $S_{12} = 222$

15.11. α) Να βρείτε τους διψήφιους αριθμούς, που όταν διαιρεθούν με το 4 δίνουν υπόλοιπο 1.

β) Να βρείτε το άθροισμά τους.

15.12. Το άθροισμα n πρώτων όρων μιας ακολουθίας δίνεται από την σχέση $S_n = 8n^2 - n$. Να δείξετε ότι πρόκειται για αριθμητική πρόοδο. Ποιος όρος της είναι ο 263;

15.13. Το άθροισμα n όρων μιας ακολουθίας δίνεται από την σχέση $S_n = \alpha \cdot n^2 + \beta \cdot n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $a_1 = \alpha + \beta$ και $\omega = 2\alpha$

15.14. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο μεσαίος όρος των 101 πρώτων όρων της είναι 303. Να βρείτε το άθροισμα των όρων 101 πρώτων όρων της

15.15. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $a_3 = 11$ και $a_6 = 23$. Πόσοι όροι της έχουν άθροισμα που δεν υπερβαίνει το 210;

15.16. Δίνεται η ακολουθία $a_n = -11 + 2n$ και το τριώνυμο $P(x) = x^2 - 4x + 3$.

α) Να δείξετε ότι η ακολουθία a_n είναι αριθμητική πρόοδος με $a_1 = -9$ και $\omega = 2$.

β) Να βρείτε το άθροισμα $S = a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21}$

γ) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου.

15.17. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν οι αριθμοί $2, \alpha, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της 9, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

15.18. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά ω .

α) Να δείξετε ότι: $\frac{a_{15} - a_{19}}{a_{10} - a_7} = 2$

β) Αν $a_{15} - a_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

15.19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2) + (x+5) + (x+8) + \dots + (x+53) = 459$

β) $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280, x > 0$

15.20. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

i) $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$

ii) $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha), \gamma(\alpha + \beta)$

iii) $(\beta + \gamma - \alpha)^2, (\gamma + \alpha - \beta)^2, (\alpha + \beta - \gamma)^2$

15.21. (Θέμα 3 34746)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

15.22. (Θέμα 4 33581)

Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) , ο 3ος όρος της είναι ίσος με 8 και ο 8ος όρος της είναι ίσος με 23.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της προόδου.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \dots + (a_{31} + 31)$.

15.23. (Θέμα 4 36653)

Δίνεται μία αριθμητική πρόοδος (a_n) και οι τρεις πρώτοι όροι της είναι οι

$$a_1 = x, a_2 = 2x^2 - 3x - 4, a_3 = x^2 - 2 \text{ με } x \in \mathbb{Z}$$

α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$.

β) Να βρείτε το n -οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου ο οποίος να είναι ίσος με 2014.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$.

15.24. (Θέμα 4 36650)

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.

γ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν, ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτήν την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.

15.25. (Θέμα 4 36674)

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

15.26. (Θέμα 4 36662)

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

15.27. (Θέμα 4 36660)

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον n – οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.

i. Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

15.28. (Θέμα 4 33858)

Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_2 = \kappa^2$ και $a_3 = (\kappa + 1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $a_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.

15.29. (Θέμα 4 33583)

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_{20} = 61$.

α) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (a_n) ,

τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

15.30. (Θέμα 4 33581)

Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) , ο 3ος όρος είναι $a_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $a_8 = 23$.

α) Να βρείτε τον 1ο όρο a_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

Αν $a_1 = 2$ και $\omega = 3$,

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της προόδου.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + (a_3 + 3) + \dots + (a_{31} + 31)$.

15.31. (Θέμα 4 33579)

Οι αριθμοί: $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i. τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii. τον πρώτο όρο της προόδου.

iii. το άθροισμα $S = a_{15} + a_{16} + a_{17} + \dots + a_{24}$.

15.32. (Θέμα 4 14962)

Έστω μία αριθμητική πρόοδος (a_n) με διαφορά $\omega = 3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2, 8]$

υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (a_n) ,

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (a_n) .

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (a_n) που υπάρχουν στο $\Delta = [2, 8]$.

γ) Αν $a_6 = 14$,

i. να βρείτε τον a_1 .

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (a_n) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186. (Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$).

15.33. (Θέμα 4 12945)

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (a_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $a_3 = 8$ και $a_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο

(b_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της (α_n) είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n .

15.34. (Θέμα 4 12694)

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

15.35. (Θέμα 4 13171)

Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_n) είναι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = S_n = 2n^2 + 2n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{με} \quad n \geq 1$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

β) Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1, \quad n \geq 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 4n + 1, \quad n \geq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

15.36. (Θέμα 4 13173)

Δίνεται η ακολουθία (α_n) με γενικό τύπο $\alpha_n = 10 + 3n$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_n) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.