

ΕΡΓΑΣΙΑ 16η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ**16.1. Ορισμός**

Μια ακολουθία (α_n) με $\alpha_1 \neq 0$ λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν και μόνο αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πολλαπλασιασμό του ίδιου πάντοτε μη μηδενικού αριθμού.

Ο αριθμός αυτός λέγεται **λόγος της προόδου** και συμβολίζεται με λ

• Μια ακολουθία (α_n) είναι **γεωμετρική πρόοδος** με λόγο λ , αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $\alpha_{n+1} = \lambda \cdot \alpha_n$ ή $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lambda$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ (**αναδρομικός τύπος της ακολουθίας**)

Οπότε αν σε μια γεωμετρική πρόοδο γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της α_1 και τον λόγο της λ , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον οποιοδήποτε όρο της.

16.2. Ο n-οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι:

$$\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

Σχόλια:

i) Προφανώς $\frac{\alpha_n}{\alpha_m} = \lambda^{n-m}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι $\frac{\alpha_n}{\alpha_m} = \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}}{\alpha_1 \cdot \lambda^{m-1}} = \lambda^{n-1-m+1} = \lambda^{n-m}$

ii) Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο το **γινόμενο των όρων που ισαπέχουν** από τους άκρους όρους, ισούται με το γινόμενο των άκρων όρων, δηλαδή $\alpha_k \cdot \alpha_{n-k+1} = \alpha_1 \cdot \alpha_n, n \in \mathbb{N}^*$

Πράγματι

$$\alpha_k \cdot \alpha_{n-k+1} = \alpha_1 \cdot \lambda^{k-1} \cdot \alpha_1 \cdot \lambda^{n-k+1-1} = \alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdot \lambda^{k-1+n-k} = \alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} = \alpha_1 \cdot \alpha_n$$

$$\text{Οπότε } \alpha_k \cdot \alpha_{n-k+1} = \alpha_1 \cdot \alpha_n$$

Παράδειγμα 1. Στην γεωμετρική πρόοδο $4, 2, \frac{1}{2}, \dots$ έχουμε $\alpha_1 = 4$ και $\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, οπότε ο

$$n^{\text{ος}} \text{ της } \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{2-n+1} = 2^{3-n}$$

Παράδειγμα 2: Δίνεται η γεωμετρική $2, -6, 18, -54, \dots$ να βρείτε:

- α) Τον 8^ο όρο β) Τον νιοστό όρο γ) Τον όρο που είναι ίσος με -486

Λύση

Στην γεωμετρική πρόοδο $2, -6, 18, -54, \dots$ έχουμε $\alpha_1 = 2$ και λόγο $\lambda = \frac{-6}{2} = -3$

α) Είναι $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, άρα $\alpha_8 = \alpha_1 \cdot \lambda^7 = 2 \cdot (-3)^7 = 2 \cdot (-2187) = -4374$

Άρα ο 8^{ος} είναι -4374

β) Ο νιοστός της όρος είναι $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Rightarrow \alpha_v = 2 \cdot (-3)^{v-1}$

γ) $\alpha_v = -486 \Leftrightarrow 2 \cdot (-3)^{v-1} = -486 \Leftrightarrow (-3)^{v-1} = -243 \Leftrightarrow (-3)^{v-1} = (-3)^5 \Leftrightarrow v-1 = 5 \Leftrightarrow v = 6$

Άρα ο 6^{ος} όρος είναι -486

Παράδειγμα 3: Δίνεται η γεωμετρική $\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$ να βρείτε:

- α) Τον 8^ο όρο β) Τον όρο που είναι ίσος με 64 γ) Τον νιοστό όρο

Λύση

Στην γεωμετρική πρόοδο $\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$ έχουμε $\alpha_1 = \frac{1}{16}$ και λόγο $\lambda = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{16}} = -2$

α) Είναι $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, άρα $\alpha_8 = \alpha_1 \cdot \lambda^7 = \frac{1}{16} \cdot (-2)^7 = 2^{-4} \cdot (-2)^7 = -2^{-4} \cdot 2^7 = -2^3 = -8$

Άρα ο 8^{ος} όρος είναι -8

β) $\alpha_v = 64 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} = 64 \Leftrightarrow \frac{1}{16} (-2)^{v-1} = 64 \Leftrightarrow (-2)^{v-1} = 64 \cdot 16 \Leftrightarrow$

$(-2)^{v-1} = 2^6 \cdot 2^4 \Leftrightarrow (-2)^{v-1} = (-2)^{10} \Leftrightarrow v-1 = 10 \Leftrightarrow v = 11$

Άρα ο 11^{ος} όρος είναι 64

γ) Ο νιοστός της όρος είναι

$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Rightarrow \alpha_v = \frac{1}{16} \cdot (-2)^{v-1} = (-2)^{-4} \cdot (-2)^{v-1} = (-2)^{v-5}$

16.3. Γεωμετρικός μέσος.

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

• Αν για αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$, τότε ο αριθμός $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$ ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των α, γ

Παράδειγμα 4.

Αν οι αριθμοί $x, 2x+1, 5x+4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$

Λύση

$$\text{Είναι } (2x+1)^2 = x \cdot (5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Παράδειγμα 5.

Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα $\frac{10}{9}$ και ο γεωμετρικός μέσος τους να είναι $\frac{1}{3}$

Λύση

Έστω x, y οι ζητούμενοι αριθμοί, τότε:

$$\begin{cases} x+y = \frac{10}{9} \\ \sqrt{xy} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{10}{9} \\ xy = \frac{1}{9} \end{cases} \xRightarrow{\text{(αφαιρούμε κατά μέλη)}} x+y-xy=1 \Leftrightarrow x+y-xy-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1-y) - (1-y) = 0 \Leftrightarrow (1-y)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } y=1$$

$$\text{Για } x=1: xy = \frac{1}{9} \Leftrightarrow y = \frac{1}{9}$$

$$\text{Για } y=1: xy = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$$

16.4 Άθροισμα n πρώτων όρων γεωμετρικής .

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) . Αν $\lambda = 1$, τότε όλοι οι όροι είναι ίσοι με τον πρώτο όρο, οπότε

$$S_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_v = \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_1 = v \cdot \alpha_1$$

$$\text{Άρα } S_v = v \cdot \alpha_1$$

$$\text{ii) Αν } \lambda \neq 1 \text{ τότε } S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}, \text{ ακόμα } S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} = \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^v - \alpha_1}{\lambda - 1} = \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1} = \frac{\alpha_v \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1}$$

$$\text{άρα } S_v = \frac{\alpha_v \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1}$$

$$\text{i) Είναι } S_v - S_{v-1} = \alpha_v$$

$$\text{ii) Αν ζητείται το άθροισμα } S \text{ των διαδοχικών όρων, } \alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_v$$

$$\text{τότε: } S = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_v = S_v - S_{k-1}$$

Παράδειγμα 6.

Αν οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha = x - 2$, $\beta = x + 1$, $\gamma = 3x - 3$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_v) και ο $\alpha = x - 2$ είναι ο 3^{ος} όρος της. Να βρείτε:

α) την τιμή του x .

β) τον 10^ο όρο και τον λόγο της προόδου

γ) το πλήθος των όρων μέχρι και τον όρο που ισούται με 768

Λύση

α) Αφού οι αριθμοί $\alpha = x - 2$, $\beta = x + 1$, $\gamma = 3x - 3$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-2)(3x-3) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 3x - 6x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = \frac{1}{2}$$

Αφού όμως $\alpha = x - 2$, $\beta = x + 1$, $\gamma = 3x - 3$ ακέραιοι αριθμοί, η τιμή $x = \frac{1}{2}$ απορρίπτεται.

$$\beta) \text{ Για } x = 5: \alpha = 5 - 2 = 3, \beta = 5 + 1 = 6, \gamma = 15 - 3 = 12$$

Άρα ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = \frac{6}{3} = 2$ και αφού

$$\alpha_3 = \alpha = 3 \Rightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 2^2 = 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Οπότε: } \alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^9 \Rightarrow \alpha_{10} = \frac{3}{4} \cdot 2^9 = \frac{3}{2^2} \cdot 2^9 = 3 \cdot 2^7 = 384$$

$$\begin{aligned} \gamma) \alpha_v = 768 &\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} = 768 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot 2^{v-1} = 768 \Leftrightarrow \frac{3}{2^2} \cdot 2^{v-1} = 3 \cdot 256 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{v-3} = 256 \Leftrightarrow 2^{v-3} = 2^8 \Leftrightarrow v-3 = 8 \Leftrightarrow v = 11 \end{aligned}$$

16.5. Πρόβλημα παρεμβολής όρων .

Το πρόβλημα: Δίνονται δύο αριθμοί α και β και θέλουμε να βρούμε n αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι ζητούμενοι αριθμοί, θέλουμε οι αριθμοί $\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n, \beta$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής.

Οι αριθμοί αυτοί είναι $n+2$ το πλήθος και η γεωμετρική πρόοδος έχει $\alpha_1 = \alpha$ και $\alpha_{n+2} = \beta$, οπότε για να βρούμε τους αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$ αρκεί να εκφράσουμε το λόγο λ συναρτήσει των α, β, n .

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$

Θέτουμε όπου n το $n+2$ και έχουμε: $\alpha_{n+2} = \alpha_1 \cdot \lambda^{n+2-1} \Leftrightarrow \alpha_{n+2} = \alpha_1 \cdot \lambda^{n+1} \Leftrightarrow \lambda^{n+1} = \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_1}$.

Από την τελευταία ισότητα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ αναλόγως αν $n+1$ άρτιος ή περιττός και $\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_1}$ θετικός ή αρνητικός.

Επομένως αφού ξέρουμε τον πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha$ και το λόγο $\lambda \in \mathbb{R}$, μπορούμε να βρούμε τον οποιοδήποτε όρο της.

Παράδειγμα 7.

Μεταξύ των αριθμών 3 και 192 να παρεμβάλλεται 5 αριθμούς έτσι ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους μια γεωμετρικής προόδου.

Λύση

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 οι ζητούμενοι αριθμοί, θέλουμε οι αριθμοί $3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 192$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

Οι αριθμοί αυτοί είναι 7 το πλήθος και η γεωμετρική πρόοδος έχει $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_7 = 192$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$

Για $n = 7$ έχουμε: $\alpha_7 = \alpha_1 \cdot \lambda^6 \Leftrightarrow 192 = 3 \cdot \lambda^6 \Leftrightarrow \lambda^6 = \frac{192}{3} \Leftrightarrow \lambda^6 = 64 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:

$$\text{Για } \lambda = 2 \quad x_1 = 3 \cdot 2 = 6, x_2 = 6 \cdot 2 = 12, x_3 = 12 \cdot 2 = 24, x_4 = 24 \cdot 2 = 48, x_5 = 48 \cdot 2 = 96$$

$$\text{Για } \lambda = -2 \quad x_1 = 3 \cdot (-2) = -6, x_2 = (-6) \cdot (-2) = 12, x_3 = 12 \cdot (-2) = -24, x_4 = -24 \cdot (-2) = 48, \\ x_5 = 48 \cdot (-2) = -96$$

16.6. Βασικές κατηγορίες ασκήσεων .

Κατηγορία 1^η : "Να βρείτε την γεωμετρική πρόοδο" σημαίνει να βρούμε τα α_1 και λ .

Παράδειγμα 8.

Να βρείτε την γεωμετρική πρόοδο στην οποία είναι $\alpha_5 = 48$ και $\alpha_8 = 384$.

Λύση

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} \alpha_5 = 48 \\ \alpha_8 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 48 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^7 = 384 \end{cases} \Rightarrow (\text{διαιρώ κατά μέλη}) \frac{\lambda^7}{\lambda^4} = \frac{384}{48} \Leftrightarrow \lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$\text{Για } \lambda = 2 : \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 48 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 2^4 = 48 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$$

Παράδειγμα 9.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_v) είναι $\alpha_{11} = 128$ και $\alpha_7 = 8$.

α) Να βρείτε την γεωμετρική πρόοδο

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

Λύση

$$\alpha) \text{ Έχουμε } \begin{cases} \alpha_{11} = 128 \\ \alpha_7 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda^{10} = 128 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^6 = 8 \end{cases} \Rightarrow (\text{διαιρώ κατά μέλη}) \frac{\lambda^{10}}{\lambda^6} = \frac{128}{8} \Leftrightarrow \lambda^4 = 16 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

$$\text{Για } \lambda = 2 : \alpha_1 \cdot \lambda^{10} = 128 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 2^{10} = 2^7 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2^7}{2^{10}} = 2^{-3}$$

$$\text{Για } \lambda = -2 : \alpha_1 \cdot (-2)^{10} = 128 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 2^{10} = 2^7 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{2^7}{2^{10}} = 2^{-3}$$

β)

$$\bullet \text{ Για } \lambda = 2 \text{ και } \alpha_1 = 2^{-3} \text{ έχουμε: } \alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Rightarrow \alpha_v = 2^{-3} \cdot 2^{v-1} = 2^{v-4}, \text{ άρα } \alpha_v = 2^{v-4}, v \in \mathbb{N}^*$$

• Για $\lambda = -2$ και $\alpha_1 = 2^{-3}$ έχουμε:

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} \Rightarrow \alpha_v = 2^{-3} \cdot (-2)^{v-1} = -(-2)^{-3} \cdot (-2)^{v-1} = -(-2)^{v-4}, \text{ άρα } \alpha_v = -(-2)^{v-4}, v \in \mathbb{N}^*$$

Κατηγορία 2^η: Διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου

Παράδειγμα 10.

Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $x+4, 3x, 4-7x$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } (3x)^2 &= (x+4) \cdot (4-7x) \Leftrightarrow 9x^2 = 4x - 7x^2 + 16 - 28x \Leftrightarrow 16x^2 + 24x - 16 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 11.

Αν οι αριθμοί $x, 10, y$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί $x, 6, y$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε τους x, y .

Λύση

Αφού $x, 10, y$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει: $x + y = 20 = S$

Αφού $x, 6, y$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει: $xy = 36 = P$

Άρα οι αριθμοί x, y είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 20\omega + 36 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \text{ ή } \omega = 18$$

Οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 2, 18

Παράδειγμα 12.

Να βρείτε τις διαστάσεις x, y, z ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αν είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, το άθροισμα των ακμών τους είναι 168, ενώ ο όγκος του είναι 512.

Λύση

Αφού x, y, z διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει: $xz = y^2$ (1)

Το άθροισμα των ακμών του είναι 168, άρα $4x + 4y + 4z = 168 \Leftrightarrow x + y + z = 42$ (2)

Ο όγκος του είναι 512, άρα $x \cdot y \cdot z = 512$ (3)

Άρα τα x, y, z είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων $(1), (2), (3)$

Αφού $xz = y^2$ (1) , η (3) γράφεται: $y^2 \cdot y = 512 \Leftrightarrow y^3 = 512 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{512} = 8$

Για $y = 8$ οι εξισώσεις $(1), (2)$ γράφονται:

$$xz = y^2 \Leftrightarrow xz = 8^2 = 64 = P \text{ και } x + 8 + z = 42 \Leftrightarrow x + z = 34 = S$$

Άρα οι αριθμοί x, z είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 34\omega + 64 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \text{ ή } \omega = 32$$

Οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 2, 8, 32

Κατηγορία 3η: Για να δείξουμε ότι μια ακολουθία (α_n) είναι γεωμετρική πρόοδος αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \text{σταθερό (ανεξάρτητο του } n)$$

Το σταθερό αυτός πηλίκος είναι ο λόγος λ της προόδου.

Σχόλιο: Αν δίνεται ο γενικός όρος (α_n) , αλλά το άθροισμα (S_n) των n πρώτων όρων της, τότε βρίσκουμε τον νιοστό όρο (α_n) από τη σχέση $\alpha_n = S_n - S_{n-1}$

Παράδειγμα 13

Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = 4 \cdot 3^n$, να δείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος (Γ.Π.).

Λύση

Είναι $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{4 \cdot 3^{n+1}}{4 \cdot 3^n} = 3$, άρα η ακολουθία $\alpha_n = 4 \cdot 3^n$, είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο

$\lambda = 3$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = 4 \cdot 3^1 = 12$

Κατηγορία 4η: Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου

Παράδειγμα 14

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος 2, 6, 9, ...

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου που υπερβαίνει τον αριθμό 2000

β) Να βρείτε το άθροισμα $S = 2 + 6 + 18 + \dots + 1458$

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } \alpha_1 = 2 \text{ και } \lambda = \frac{6}{2} = 3 \text{ άρα } \alpha_v = \alpha_1 \lambda^{v-1} \Rightarrow \alpha_v = 2 \cdot 3^{v-1}, v \in \mathbb{N}^*$$

Θα βρούμε τον μικρότερο φυσικό αριθμό v για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_v > 2000 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{v-1} > 2000 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{v-1} > 2000 \Leftrightarrow 3^{v-1} > 1000 \quad (1)$$

Με δοκιμές παρατηρούμε ότι: $3^6 = 729 < 1000$ και $3^7 = 2187 > 1000$

Άρα η σχέση (1) ισχύει για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ με $v-1 \geq 7 \Leftrightarrow v \geq 8$

Επομένως ο πρώτος όρος της προόδου που υπερβαίνει τον αριθμό 2000 είναι ο 8ος όρος

$$\alpha_8 = 2 \cdot 3^{8-1} = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2187 = 4374$$

β) Πρόκειται για το άθροισμα v -πρώτων της γεωμετρικής προόδου.

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των όρων του.

Έστω v το πλήθος αυτών, τότε θα είναι

$$\alpha_v = 1458 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{v-1} = 1458 \Leftrightarrow 3^{v-1} = 729 \Leftrightarrow 3^{v-1} = 3^6 \Leftrightarrow v = 7$$

Άρα το πλήθος των όρων είναι $v = 7$ και $\alpha_7 = 1258$

$$S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} = 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{2} = 3^7 - 1 = 2187 - 1 = 2186$$

ή χωρίς να βρούμε το πλήθος των όρων

$$S_v = \frac{\alpha_v \cdot \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1} = \frac{1458 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = \frac{4372}{2} = 2186$$

Παράδειγμα 15.

Να ορίσετε την γεωμετρική πρόοδο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$S_4 = 40 \text{ και } S_8 = 3280$$

Λύση

$$\text{Είναι } S_v = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$$

Έχουμε:

$$\begin{cases} S_4 = 40 \\ S_8 = 3280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 40 \\ \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^8 - 1}{\lambda - 1} = 3280 \end{cases}$$

Διαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1}}{\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^8 - 1}{\lambda - 1}} &= \frac{40}{3280} \Leftrightarrow \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^8 - 1} = \frac{40}{3280} \Leftrightarrow \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^8 - 1} = \frac{1}{82} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda^4 - 1}{(\lambda^4 - 1)(\lambda^4 + 1)} &= \frac{1}{82} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^4 + 1} = \frac{1}{82} \Leftrightarrow \lambda^4 + 1 = 82 \Leftrightarrow \lambda^4 = 81 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3 \end{aligned}$$

• Για $\lambda = 3$:

$$\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{80}{2} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 40 = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

• Για $\lambda = -3$:

$$\alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{(-3)^4 - 1}{-3 - 1} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{80}{-4} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot (-20) = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2$$

Κατηγορία 5^η: Προβλήματα

Παράδειγμα 16.

Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα.

α) Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος τους ύστερα από 6 ώρες.

β) Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματάει τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων ανά ώρα.

- i) Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.
- ii) Μετά πόσες ώρες μετά τον ψεκασμό θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

Ανδρέας Παντερής

Ασκήσεις:

16.1. Σε μία γεωμετρική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι 16 και ο έκτος όρος είναι το 2.

α) Να δείξετε ότι $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

16.2. Σε μια γεωμετρική πρόοδο δίνονται $\alpha_4 - \alpha_2 = 24$ και $\alpha_2 + \alpha_3 = 6$ Να βρείτε την πρόοδο.

16.3. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = 3 \cdot 2^n$

α) Να δείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος .

β) Να βρείτε τον α_{15} .

γ) Ποιος όρος της είναι ο 3072;

16.4. Σε μια γεωμετρική πρόοδο δίνονται $\alpha_2 = \frac{8}{3}$ και $\alpha_5 = \frac{64}{81}$. Να βρείτε την πρόοδο.

16.5. Να βρείτε 7 ακέραιους αριθμούς όρους γεωμετρικής προόδου αν το άθροισμα των τριών πρώτων είναι 13 και το άθροισμα των τριών τελευταίων είναι 1053.

16.6. Μια γεωμετρική πρόοδο έχει πρώτο όρο το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 3x + 2 = 0$ και λόγο το γινόμενο των ριζών τους. Να βρείτε ποιος όρος της είναι το 192.

16.7. Σε μια γεωμετρική πρόοδο ισχύει $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$. Να βρείτε το λ .

16.8. Ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στους αριθμούς 2,16,58 ώστε να γίνουν όροι γεωμετρικής προόδου.

16.9.

α) Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί $x-1, x+1, x+5$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

β) Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι: $\alpha = \beta = \gamma$

γ) Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4}{\gamma} + \frac{\beta^2\gamma^2 - \alpha^4}{\alpha} + \frac{\gamma^2\alpha^2 - \beta^4}{\beta} = 0$

δ) Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι: i) $(\alpha + \delta)(\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = (\beta - \gamma)^2$ ii) $\frac{\beta + \delta}{\alpha} = \frac{\gamma^2\delta + \delta^3}{\gamma^3}$

16.10. Να βρείτε τρεις αριθμούς που να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, το γινόμενο τους να είναι 216 και το άθροισμα των άκρων όρων να είναι -20

16.11. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1 - 2 + 4 - 8 \dots + 256$

16.12. Σε μια Γ.Π. ισχύει $a_1 = 7$ και $S_3 = 91$ να βρείτε το λ .

16.13. Ένας παππούς αποταμιεύει 1€ τον πρώτο χρόνο γέννησης του εγγονιού του, 3 € τον δεύτερο, 9 € τον τρίτο, 27 € τον τέταρτο κ.ο.κ. Αν συνεχίσει με τον ίδιο ρυθμό να βρείτε:

α) Πόσα € θα αποταμιεύσει το 8^ο χρόνο;

β) Πόσα € συνολικά θα έχει αποταμιεύσει μέχρι και τον 8^ο χρόνο;

16.14. Να βρείτε τρεις αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i)είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

ii)έχουν άθροισμα 15.

iii)αν σε αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς 1, 4, 19 αντίστοιχα, θα γίνουν διαδοχικοί όροι Γ.Π.

16.15. (ΘΕΜΑ_2 _ 34156)

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) , για την οποία ισχύει $\frac{a_3}{a_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 .

16.16. (ΘΕΜΑ_3 _ 35037)

Οι αριθμοί $k-2, 2k, 7k+4, k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β) i. Να εκφράσετε τον 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 .

ii. Να αποδείξετε ότι: $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$.

16.17.(ΘΕΜΑ_4 _ 12998)

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά από το ατύχημα.

- β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;
- γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

16.18 (ΘΕΜΑ_4_12998)

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου,

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$.

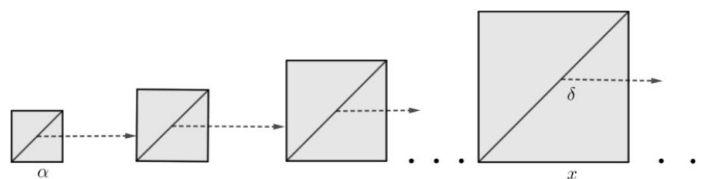
β) Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου

(α_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

16.19 (ΘΕΜΑ_4_14645)

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς a , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



- α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.
- ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_n = a^2 \cdot 2^{n-1}$.
- β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:
- i. την πλευρά a του αρχικού τετραγώνου.
- ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.

16.23 (ΘΕΜΑ_4_12731)

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.
- γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda, (\kappa > 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

16.24 (ΘΕΜΑ_4_33891)

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_v) με λόγο λ για την οποία ισχύουν: $\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.
- β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_v) , με $\beta_v = \frac{1}{\alpha_v}, v = 1, 2, 3, \dots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_v) .
- γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_v) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_v) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

16.23 (ΘΕΜΑ_4_34180)

Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;
- β) Να βρείτε τον αριθμό x, ώστε οι 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;
- γ) Αν (α_v) είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ... και (β_v) η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, ..., τότε να βρείτε:
- i. το άθροισμα S_v των v πρώτων όρων της (α_v) ,
- ii. την τιμή του v, ώστε για το άθροισμα S_v του γι) ερωτήματος να ισχύει: $2 \cdot (S_v + 24) = \beta_7$.

16.24 (ΘΕΜΑ_4_34181)

Δίνεται ορθογώνιο μήκους α , πλάτους β και εμβαδού E. Οι αριθμοί α, E, β , με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E.
- β) Αν $E = 1$ και $\alpha + \beta = 10$,
- i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες α και β .
- ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

16.25 (ΘΕΜΑ_4_36649)

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204.800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102.400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51.200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3.200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n .

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;