

ΕΡΓΑΣΙΑ 18η

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (2)

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ – ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

(18.1) Ένα σημείο $M(x_M, y_M)$ βρίσκεται:

- α) Στον ημιάξονα Ox : όταν $x_M > 0$ και $y_M = 0$
- β) Στον ημιάξονα Ox' : όταν $x_M < 0$ και $y_M = 0$
- γ) Στον ημιάξονα Oy : όταν $x_M = 0$ και $y_M > 0$
- δ) Στον ημιάξονα Oy' : όταν $x_M = 0$ και $y_M < 0$
- ε) Στον άξονα $x'x$: όταν $y_M = 0$
- στ) Στον άξονα $y'y$: όταν $x_M = 0$

Άσκηση 18.1. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο:

- α) $A(\lambda + \mu, \mu - 1)$ να βρίσκεται στον ημιάξονα Ox
- β) $B(\lambda - 2, \lambda - \mu)$ να βρίσκεται στον ημιάξονα Oy'
- γ) $\Gamma(\lambda^2 - 1, \lambda)$ να βρίσκεται στον ημιάξονα Oy

Άσκηση 18.2. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $M(\alpha^2 + 2\alpha - 15, |\alpha - 3| - 2)$ να είναι σημείο:

- α) του θετικού ημιάξονα Oy
- β) του αρνητικού ημιάξονα Ox'

(18.2) Ένα σημείο $M(x_M, y_M)$ βρίσκεται:

- α) Στο 1^ο τεταρτημόριο όταν $x_M > 0$ και $y_M > 0$
- β) Στο 2^ο τεταρτημόριο όταν $x_M < 0$ και $y_M > 0$
- γ) Στο 3^ο τεταρτημόριο όταν $x_M < 0$ και $y_M < 0$
- δ) Στο 4^ο τεταρτημόριο όταν $x_M > 0$ και $y_M < 0$

Άσκηση 18.3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

- α) το σημείο $A(\alpha + 2, 3 - \alpha)$ ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο
- β) το σημείο $B(3\alpha - 9, 8 + 2\alpha)$ ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο
- γ) το σημείο $\Gamma(|\alpha| - 3, 1 - \alpha^2)$ ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο
- δ) το σημείο $\Delta(|2\alpha - 1| - 3, |\alpha - 1| - 5)$ ανήκει στο 4^ο τεταρτημόριο
- ε) το σημείο $E(9 - \alpha^2, \alpha^2 - \alpha)$ ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο
- στ) το σημείο $Z(\alpha^2 - \alpha - 12, \alpha^2 - \alpha - 2)$ ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο

(18.3) Συμμετρίες

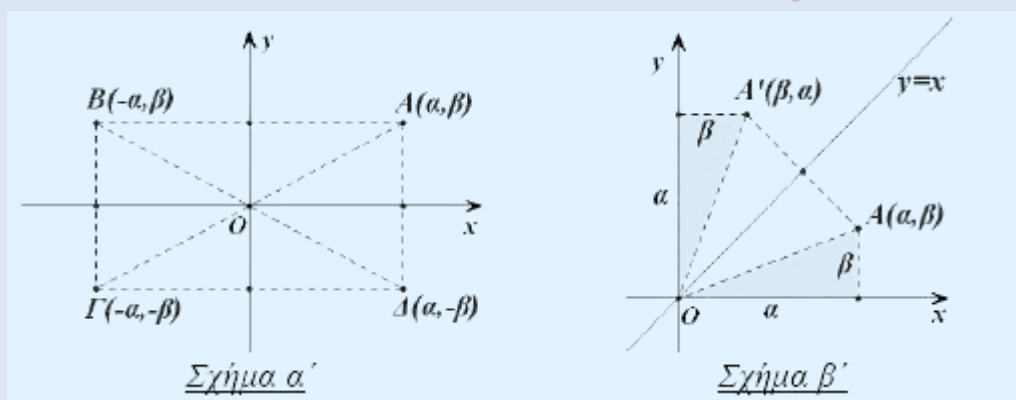
Δύο σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ είναι συμμετρικά:

α) ως προς τον άξονα $x'x$ όταν έχουν την ίδια τετμημένη και τεταγμένες αντίθετες
δηλαδή $x_A = x_B$ και $y_A + y_B = 0$

β) ως προς τον άξονα $y'y$ όταν έχουν την ίδια τεταγμένη και τετμημένες αντίθετες
δηλαδή $x_A + x_B = 0$ και $y_A = y_B$

γ) ως προς τον αρχή των αξόνων όταν έχουν αντίθετες τετμημένες και τεταγμένες
δηλαδή $x_A + x_B = 0$ και $y_A + y_B = 0$

δ) ως προς τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων όταν η τετμημένη του ενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου δηλαδή $x_A = y_B$ και $y_A = x_B$



Άσκηση 18.4. Να βρείτε τα συμμετρικά των σημείων $A(2, -3)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma(-3, -2)$ ως προς:

- α) τον άξονα $x'x$ β) τον άξονα $y'y$ γ) την αρχή των αξόνων
δ) τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων

Άσκηση 18.5. Δίνονται τα σημεία $A(2x-7, 3-y)$ και $B(-5, 1)$. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς:

- α) τον άξονα $x'x$ β) τον άξονα $y'y$ γ) την αρχή των αξόνων
δ) τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων

Άσκηση 18.6. Δίνονται τα σημεία $A(|x|-5, |1-2y|-7)$ και $B(2,4)$. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς:

- α) τον άξονα x'x β) τον άξονα y'y γ) την αρχή των αξόνων
- δ) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

Άσκηση 18.7.

Τα σημεία $A(\alpha^2 + 2\alpha, 2 - 2\alpha)$, $B(\alpha + 6, \alpha^2 - \alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x

- α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$
- β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς:
- i) τον άξονα x'x ii) τον άξονα y'y iii) την αρχή των αξόνων
- iv) τη διχοτόμο της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων.

Άσκηση 18.8.

Το συμμετρικό ενός σημείου Ν ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το Μ. Το συμμετρικό του Μ ως προς το σημείο $O(0,0)$ είναι το $K(x-1,2)$ Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το συμμετρικό του Ν ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $A(-3, x^2 - 2)$

(18.4) Απόσταση δύο σημείων

Έστω τα σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ ορίζουμε ως απόσταση των σημείων A,B το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία A και B.

$$\text{Είναι } (AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Παράδειγμα 1

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(3,0)$ έχει μήκος

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow (AB) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (0 - 3)^2} \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (3)^2}$$

$$\Leftrightarrow (AB) = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Σχόλια:

i). Αν τα σημεία A και B έχουν **την ίδια τετμημένη** δηλαδή $A(x_1, y_1)$ και $B(x_1, y_2)$ τότε

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow (AB) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}$$

Άρα η απόσταση τους $(AB) = |y_2 - y_1|$ (δηλαδή με την **απόλυτη τιμή της διαφοράς των τεταγμένων τους**)

Παράδειγμα 2

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(-1, 3)$ και $B(-1, 6)$ έχει μήκος

$$(AB) = |y_B - y_A| = |6 - 3| = 3$$

ii) Αν τα σημεία A και B έχουν **την ίδια τεταγμένη** δηλαδή $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_1)$ τότε

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

Άρα η απόσταση τους $(AB) = |x_2 - x_1|$ (δηλαδή με την **απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετμημένων τους**)

Παράδειγμα 3

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(-1, 3)$ και $B(-3, 3)$ έχει μήκος

$$(AB) = |x_B - x_A| = |-3 - (-1)| = |-2| = 2$$

iii) Η απόσταση του σημείου $A(x_A, y_A)$ από τον άξονα $x'x$ είναι

$$d(A, x'x) = |\text{τεταγμένη}| = |y_A|$$

από τον άξονα $y'y$ είναι $d(A, y'y) = |\text{τετμημένη}| = |x_A|$

και από την αρχή των αξόνων $(OA) = \sqrt{(\text{τετμημένη})^2 + (\text{τεταγμένη})^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σημείο $A(\lambda - 1, \lambda - 3)$ απέχει από την αρχή των αξόνων $2\sqrt{5}$

$$\text{Είναι } (OA) = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 3)^2} \Rightarrow (2\sqrt{5}) = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 3)^2} \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 = (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 = 2\lambda^2 - 8\lambda + 10 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 8\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 5.$$

Παράδειγμα 5

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,4)$, $B(5,2)$ και $\Gamma(-2,-2)$ είναι ορθογώνιο

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, θα δείξουμε δηλαδή ότι το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων.

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow (AB) = \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$(A\Gamma) = \sqrt{(x_\Gamma - x_A)^2 + (y_\Gamma - y_A)^2} \Rightarrow (A\Gamma) = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} \Rightarrow (B\Gamma) = \sqrt{(-2-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

Αφού $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{45})^2 = 20 + 45 = 65 = (\sqrt{65})^2 = (B\Gamma)^2$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $B\Gamma$.

Άσκηση 18.9

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(2,-2)$, $B(-2,2)$ και $\Gamma(-2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 18.10.

Δίνονται τα σημεία $A(-2, \alpha)$, $B(9 - \alpha, 2\alpha + 3)$ να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $(AB) = 10$

Άσκηση 18.11.

Δίνονται τα σημεία $A(-5,7)$, $B(1,5)$

Να βρείτε σημείο M του άξονα x' το οποίο να ισαπέχει από τα σημεία A και B .

Άσκηση 18.12.

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha^4, (\beta^2 - 1)^3)$, $B(\alpha^2 - 6, 27)$ με $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να βρείτε:

α) τις τιμές των α και β .

β) τις αποστάσεις των σημείων A και B από τους άξονες.