

ΕΡΓΑΣΙΑ 19η

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

(3)

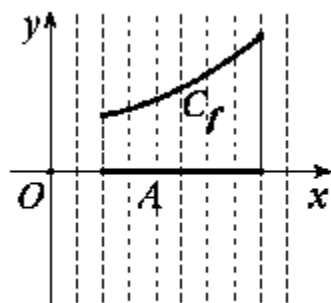
Γραφική παράσταση συνάρτησης – Σχετικές θέσεις συναρτήσεων

Η Συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$ 19.1 Γραφική παράσταση συνάρτησης C_f

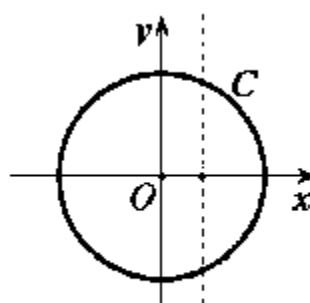
• Ένα σημείο $M(x, y)$ θα λέμε ότι επαληθεύει τον τύπο της συνάρτησης f , αν το x αντιστοιχεί στο y μέσω της f , «σχηματικά» $x \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow f(x) = y$

• Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ τα οποία επαληθεύουν τον τύπο της, δηλαδή: $C_f = \{(x, y) / y = f(x), x \in A_f\}$

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β').



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$ και τούτο διότι η γραφική παράστασης της $-f$ αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$.

19.2 ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

α) Σημεία τομής της C_f με τους άξονες – διαστήματα του x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

i) Για να βρούμε που τέμνει τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, δεκτές είναι οι λύσεις που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f .

ii) Για να βρούμε που τέμνει τον άξονα $y'y$, βρίσκουμε την τιμή $f(0)$.

Αν το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, τότε η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

iii) Για να βρούμε διαστήματα του x που η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) > 0$.

Ενώ δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) \leq 0$ Δεκτές είναι οι λύσεις που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f .

iv) Για να βρούμε διαστήματα του x που η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) < 0$.

Ενώ δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) \geq 0$ Δεκτές είναι οι λύσεις που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f .

β) Σημεία τομής των C_f, C_g – διαστήματα του x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω ή κάτω από την C_g

• Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού A_f, A_g των συναρτήσεων και το σύνολο $A = A_f \cap A_g \neq \emptyset$

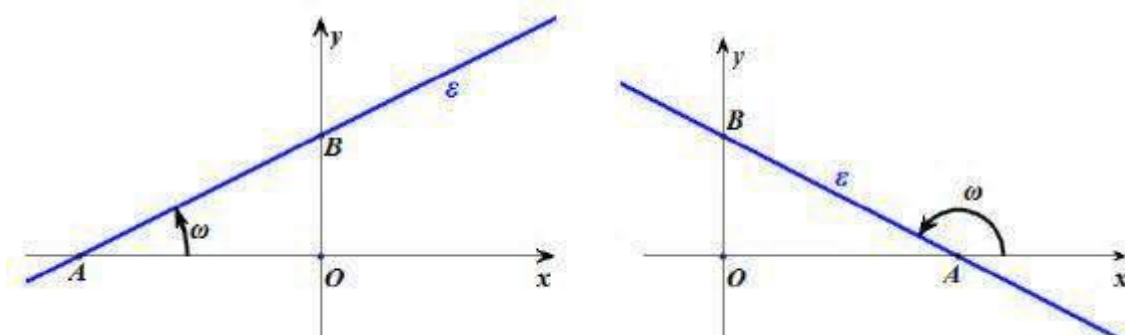
i) . για τα κοινά σημεία: οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ με $x \in A_f \cap A_g$. Για να βρούμε τις τεταγμένες των κοινών σημείων, αντικαθιστούμε τις ρίζες που βρήκαμε στον τύπο σε μια από τις f, g .

ii) Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω (κάτω) από την C_g , λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$) με $x \in A_f \cap A_g$.

19.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \alpha x + \beta$

1. Τι λέμε γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$.

α) Έστω Oxy σύστημα συντεταγμένων και (ε) μία ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A . Τη κυρτή γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ευθεία (ε) , τη λέμε γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.



β) Ορίζουμε ως **συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας (ε)** την εφαπτομένη της γωνίας ω . Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) συμβολίζεται συνήθως με λ_ε ή απλά με λ .

Παρατηρήσεις:

α) Σε κάθε περίπτωση είναι $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$

β) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν, τότε $\omega = 0^\circ$ και $\lambda = \varepsilon\phi 0^\circ = 0$.

γ) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$, τότε $\omega = 90^\circ$ και δεν ορίζεται συντελεστή διεύθυνσης.

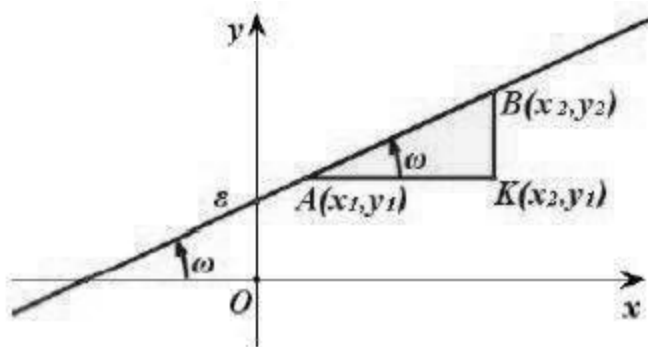
δ) Ισχύουν:

- $\lambda_\varepsilon > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \omega < 90^\circ$ (οξεία γωνία)
- $\lambda_\varepsilon < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \omega < 180^\circ$ (αμβλεία γωνία)

2. Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta, \alpha \neq 0$

α) Αποδεικνύεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ με κλίση $\lambda = \alpha$.

β) (Εκτός ύλης) Ο συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ενώ αν $x_1 = x_2$, τότε αφού $(\varepsilon) \parallel y'y$, ο συντελεστή διεύθυνσης λ δεν ορίζεται.



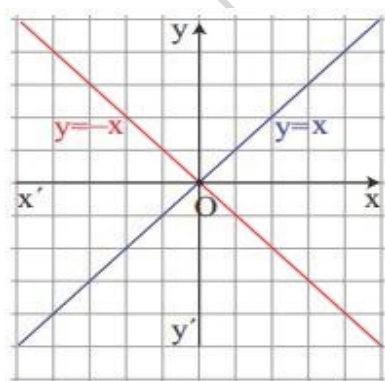
γ) Τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{-\beta}{\alpha}, 0\right)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$

δ) Ισχύουν:

- $\alpha > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \omega < 90^\circ$ (οξεία γωνία)
- $\alpha < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \omega < 180^\circ$ (αμβλεία γωνία)
- $\alpha = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ (στην περίπτωση αυτή η ευθεία είναι **παράλληλη** στον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν)

3. Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x, \alpha \neq 0$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, άρα η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων



- Για $\alpha = 1$, τότε ($\varepsilon\phi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$) έχουμε την ευθεία $y = x$, η οποία διχοτομεί τις γωνίες του 1ου και 3ου τεταρτημόριου.
- Για $\alpha = -1$, τότε ($\varepsilon\phi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$) έχουμε την ευθεία $y = -x$, η οποία διχοτομεί τις γωνίες του 2ου και 4ου τεταρτημόριου.

4. Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \beta, (\alpha = 0)$

- Αφού $\alpha = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ παριστάνει ευθεία **παράλληλη** στον άξονα $x'x$
- Αν επιπλέον και $\beta = 0$ παριστάνει ευθεία η οποία συμπίπτει με τον άξονα $x'x$

5. Συνθήκες παραλληλίας – καθετότητας.

Έστω οι ευθείες. Αν λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντιστοίχως τότε:

i) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και ii) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

6. Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ αντιστοίχως και ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες αυτές σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες ω_1, ω_2 αντιστοίχως.

Αν $\alpha_1 = \alpha_2$, τότε $\varepsilon\omega_1 = \varepsilon\omega_2$, οπότε $\omega_1 = \omega_2$ και άρα οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.

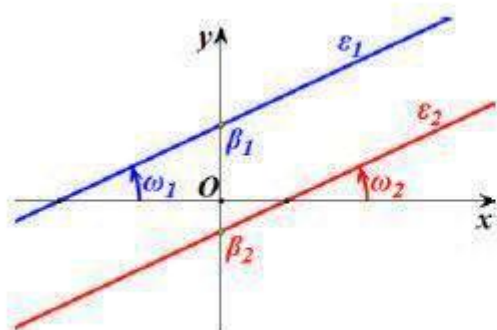
Ειδικότερα :

Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχ. α'), ενώ

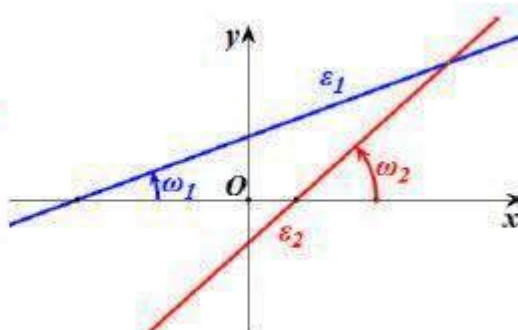
Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε $\varepsilon\omega_1 \neq \varepsilon\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και άρα οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται.

(Σχ. β')



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Ασκήσεις

Ασκηση 19.1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x - 2$. Να εξετάσετε ποιο από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .

- i) $A(2, 4)$ ii) $B(-1, -6)$ iii) $\Gamma(0, -2)$ iv) $\Delta(-4, -10)$

Ασκηση 19.2.

Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3|x| - 5$ που έχει τετμημένη i) 4 ii) -6 και τεταγμένη iii) 1 iv) -10

Ασκηση 19.3. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο A σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

α) $f(x) = x^2 - \alpha x + 2\alpha$, με $A(2, 4)$

β) $f(x) = 4x^2 - 3x$, με $A(|\alpha|, 1)$

γ) $f(x) = x - 2$, με $A\left(\frac{|\alpha - 1| + 1}{3}, \frac{2 - |3 - 3\alpha|}{4}\right)$

Ασκηση 19.4.

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 - \beta x + \alpha - 2\beta$ τέμνει τον άξονα x' στο σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1 να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 19.5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x - 4}{x} & , x < 0 \\ \beta - 1 + \alpha\sqrt{x} & , x \geq 0 \end{cases}$ Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει

τον άξονα x' στο -2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο 3 να βρείτε:

α) τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) την συνάρτηση f

γ) το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $A(\lambda^2, -2)$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της f

Ασκηση 19.6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - |x|}$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f .

β) τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες..

γ) Τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται:

- i) Πάνω από τον άξονα $x'x$.
- ii) Κάτω από τον άξονα $x'x$.

Ασκηση 19.7.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x| - 4$, να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της f .
- β) τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες..
- γ) Τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της f βρίσκεται:
 - i) Πάνω από τον άξονα $x'x$.
 - ii) Κάτω από τον άξονα $x'x$.

Ασκηση 19.8.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x| - 1}{x^2 - 3|x| + 2}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της f .
- γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{4}$
- δ) Να λυθεί η ανίσωση: $f(x) < 0$
- ε) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες.

Ασκηση 19.9.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$, να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της f .
- β) τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες..
- γ) Τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται:
 - i) Πάνω από τον άξονα $x'x$.
 - ii) Κάτω από τον άξονα $x'x$.

Ασκηση 19.10.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x| - x + 1$, να βρείτε:

Τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται:

- i) Πάνω από τον άξονα $x'x$.
- ii) Κάτω από τον άξονα $x'x$.

Ασκηση 19.11.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 4x - 6$ και $g(x) = -x^2 - 2x + 15$

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f, g
- β) Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g .

Άσκηση 19.12.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2 + x - 10}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιηθεί ο τύπος της

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της $g(x) = 3$.

Άσκηση 19.13.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \beta x + 6}{x^2 - x + \gamma}$

α). Αν $f(1) = -\frac{1}{3}$ και η τιμή $x = 3$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f , να αποδείξετε ότι

$\beta = -5$ και $\gamma = -6$

β). Για $\beta = -5$ και $\gamma = -6$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να την απλοποιήσετε

γ). Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -\frac{x}{3}$

Άσκηση 19.14

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x - 3$

β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η κλίση της ευθείας $\eta: y = (2\lambda - 3)x + 5$ να είναι 1.

Άσκηση 19.15

α) Να βρείτε την γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία $\varepsilon_1: y = -x - 1$ με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\varepsilon_2: y = (2\lambda - 3)x + 5$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 120^\circ$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\varepsilon_3: y = (\lambda^2 - 3)x + 5$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

δ) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία $\varepsilon_4: y = (\lambda^2 - \lambda + 3)x + 5$

Άσκηση 19.16.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $\varepsilon_1 : y = -2x + 4$ με τους άξονες και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε..

β) Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\varepsilon_1 : y = (\lambda - 2\mu)x + \mu + 1$, να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,3)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-1,0)$

Άσκηση 19.17.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $(-2,3)$ και:

α) έχει κλίση $\frac{3}{2}$

β) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 150^\circ$.

γ) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

δ) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Άσκηση 19.18.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

Άσκηση 19.19.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

Άσκηση 19.20 Να βρείτε την ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη -1 .

Άσκηση 19.21

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = |\lambda + 1|x + \lambda - 2$ και

$\varepsilon_2 : y = 2x + 2\lambda - 3$

α) είναι παράλληλες.

β) ταυτίζονται.

γ) τέμνονται

Άσκηση 19.22.

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (\lambda^4 - 9)x + \lambda - 2$

α) είναι παράλληλη στον άξονα x'

β) είναι παράλληλη στη διχοτόμο των γωνιών του $2^{\text{ου}}$, $4^{\text{ου}}$ τεταρτημόριου.

Άσκηση 19.23.

Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (\lambda^2 - 7\lambda)x + 1, \lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε) , να διέρχεται από το σημείο $A(1, -11)$

β) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε στο (α) ερώτημα,

Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) με εξίσωση $y = -12x + 5$

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα, να βρείτε την τιμή του $\mu < 0$ έτσι ώστε η ευθεία $y = -|\mu^2 - 4|x + 2$, να είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) .

Άσκηση 19.24.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 1$ και $\varepsilon_2 : y = (\lambda^2 - 6\lambda + 6)x + 5, \lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν είναι παράλληλες.

β) Για $\lambda = -1$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού μ η ευθεία $\varepsilon_3 : y = |\mu - 2|x + 3$ είναι παράλληλη στην ε_1 .

Άσκηση 19.25

14184. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x) = x + 2, x \neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 6)

Ασκηση 19.26

13473. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(Μονάδες 6)

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι $A=2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3| - |x-1| = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = 3 - x$ και $g(x) = x - 1$ για $1 \leq x \leq 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)| = 2$.

(Μονάδες 4)

Ασκηση 19.27

13367. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

(Μονάδες 5)

Ασκηση 19.28

12921. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|x| - 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - \kappa^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .

(Μονάδες 8)

γ) Για $\kappa = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 5)

δ) Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (AB).

(Μονάδες 7)

Ασκηση 19.29

13091. Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

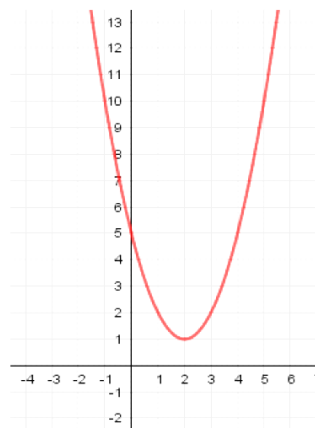
(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β) i.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

(Μονάδες 6)



Άσκηση 19.30

12682. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x + 3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g .
(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .
(Μονάδες 7)

Άσκηση 19.31

33894. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
(Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$.
(Μονάδες 7)

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
(Μονάδες 4)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.
(Μονάδες 5)

Άσκηση 19.32

36684. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .
(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = a$, $a < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 10)

Άσκηση 19.33

36681. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.
(Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.
(Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 10)

Άσκηση 19.34

1403. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B . (Μονάδες 8)

Άσκηση 19.35

12913.α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

Άσκηση 19.36

16153. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

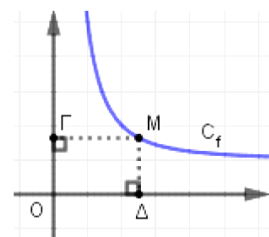
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f . Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

ii. $E \geq 4$.



(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)