ΕΡΓΑΣΙΑ 2Η ΛΟΓΙΚΗ 23/09/2024

2.1. Τι ονομάζουμε έκφραση στα Μαθηματικά;
Ένα σύνολο από λέξεις και σύμβολα που έχει κάποιο νοητικό περιεχόμενο.
Π.χ. Ο αριθμός **3** διαιρεί το **24.**

2.2 Τι ονομάζουμε λογική πρόταση ή απλά πρόταση ή λογικό ισχυρισμό στα Μαθηματικά;
Κάθε έκφραση που μπορούμε να τη χαρακτηρίσομε ως **αληθή ή ψευδή.**
Τις λογικές προτάσεις τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα **p,q,r,s,… ή** με τα αντίστοιχα κεφαλαία γράμματα **P,Q,R,S,…**

Π.χ. Η έκφραση **p: « ο αριθμός 25 είναι πολλαπλάσιο του 3»** είναι μια λογική πρόταση, γιατί μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε ως **ψευδή.**
Η έκφραση **q: « ο αριθμός κ είναι άρτιος» δεν** είναι λογική πρόταση, γιατί δεν μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε ούτε ως **ψευδή** ούτε ως αληθή.

2.3. Λογικές τιμές
Κάθε πρόταση **p** ανάλογα με το περιεχόμενο της, μπορεί να πάρει μια μόνο από τις παρακάτω **λογικές τιμές.**
- Την τιμή **α,** αν η **p** είναι αληθής.
- Την τιμή **ψ,** αν η **p** είναι ψευδής.

2.4. Σύνολο αληθείας
Το σύνολο που έχει ως στοιχεία του τα στοιχεία του βασικού συνόλου Ω (ή όπως θα λέμε του συνόλου αναφοράς Α), ονομάζεται σύνολο αληθείας της πρότασης **p** .

Δηλαδή αν είναι Β το σύνολο αληθείας τότε: $B=\{x\in A\,/\,p:\ \text{αληθής}\}$

Παράδειγμα 1 .
Η πρόταση **p: ο αριθμός διαιρείται με το 3** με σύνολο αναφοράς το $A=\{2,5,9,11,15,20,27\}$ έχει σύνολο αληθείας το $B=\{9,15,27\}$

2.5. Λογικές πράξεις ονομάζουμε τις διαδικασίες παραγωγής νέων προτάσεων συνδέοντας δύο οποιεσδήποτε προτάσεις με τις λέξεις **«και», «ή», «αν», «τότε», «δεν ή όχι»**

Παράδειγμα 2 . Δίνονται οι προτάσεις:
α) p: « Αν $\alpha\in\mathbb{Z}$ και $\beta\in\mathbb{N}$, τότε $(\alpha+\beta)\in\mathbb{Z}$
β) q: « Αν δύο αριθμοί α και β είναι άρτιοι ή περιττοί, τότε το άθροισμα τους είναι άρτιος αριθμός»

Για την p έχουμε τις απλές προτάσεις:

$\mathbf{p_1}$:Ο αριθμός $\alpha \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{p_2}$:Ο αριθμός $\beta \in \mathbb{N}$

$\mathbf{p_1}$:Ο αριθμός $(\alpha+\beta) \in \mathbb{Z}$

Έτσι η πρόταση γράφεται: $(\text{αν } p_1 \text{ και } p_2)$, τότε p_3.

Για την q έχουμε τις απλές προτάσεις:

$\mathbf{q_1}$:Ο αριθμός **α** είναι άρτιος

$\mathbf{q_2}$:Ο αριθμός **β** είναι άρτιος

$\mathbf{q_3}$:Ο αριθμός **α** είναι περιττός

$\mathbf{q_4}$:Ο αριθμός **β** είναι περιττός

$\mathbf{q_5}$:Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha+\beta}$ είναι άρτιος

Έτσι η πρόταση γράφεται: $(\text{αν } q_1 \text{ και } q_2)$ ή $(q_3 \text{ και } q_4)$, τότε q_5

2.6 Η συνεπαγωγή

α) Συνεπαγωγή δύο λογικών ισχυρισμών $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ονομάζουμε την πρόταση «**αν p ,τότε q** », η οποία συμβολίζεται με "$\mathbf{p \Rightarrow q}$" και διαβάζουμε «**p συνεπάγεται q** ».
Την πρόταση **p** τη λέμε **υπόθεση** της συνεπαγωγής ενώ την πρόταση **q** τη λέμε **συμπέρασμα** της συνεπαγωγής

Η λογική τιμή της συνεπαγωγής "$\mathbf{p \Rightarrow q}$" είναι:

- **Ψευδής,** αν η **p** είναι αληθής και η **q** ψευδής.
- **Αληθής,** σε κάθε άλλη περίπτωση
- **Πίνακας αληθείας της "$\mathbf{p \Rightarrow q}$"**

p	q	$\mathbf{p \Rightarrow q}$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

β) Αντίστροφη της συνεπαγωγής "$\mathbf{p \Rightarrow q}$", ονομάζουμε τη συνεπαγωγή "$\mathbf{q \Rightarrow p}$".
Τις προτάσεις "$\mathbf{p \Rightarrow q}$" και "$\mathbf{q \Rightarrow p}$" τις ονομάζουμε **αντίστροφες προτάσεις**

Παράδειγμα 3 . **Δίνονται οι προτάσεις:**
p: « Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο»
q: «Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές»

α) Να διατυπώσετε τις συνεπαγωγές "$\mathbf{p \Rightarrow q}$", "$\mathbf{q \Rightarrow p}$"
β)Να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή ψευδείς.

2.7 Η διάζευξη δύο προτάσεων

α) Διάζευξη δύο λογικών προτάσεων $\mathbf{p,q}$ ονομάζουμε την πρόταση $(\mathbf{p}$ **ή** $\mathbf{q})$ ή $(\mathbf{p \vee q})$ η οποία είναι **αληθής** μόνο όταν μια τουλάχιστον από τις $\mathbf{p,q}$ είναι **αληθής.**

- Πίνακας αληθείας της "$\mathbf{p \vee q}$"

p	**q**	$p \vee q$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

(*) ***Σχόλιο:*** *Η πρόταση* $(\mathbf{p}$ **ή** $\mathbf{q})$ *ή* $(\mathbf{p \vee q})$ *είναι ψευδής,* ***αν και μόνο αν*** *και οι δύο προτάσεις* $\mathbf{p,q}$ ***είναι ψευδείς.***

2.8 Η σύζευξη δύο προτάσεων

α) Σύζευξη δύο λογικών προτάσεων $\mathbf{p,q}$ ονομάζουμε την πρόταση
$(\mathbf{p}$ **και** $\mathbf{q})$ ή $(\mathbf{p \wedge q})$ η οποία είναι αληθής, **αν και μόνο αν** και οι δύο προτάσεις $\mathbf{p,q}$ είναι αληθείς.

- Πίνακας αληθείας της $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

2.9 Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

α) Ισοδυναμία δύο λογικών ισχυρισμών $\mathbf{p,q}$ ονομάζουμε την πρόταση "$\mathbf{p\Rightarrow q}$ **και** $\mathbf{q\Rightarrow p}$", η οποία συμβολίζεται με "$\mathbf{p\Leftrightarrow q}$" και διαβάζουμε « $\mathbf{p}$ ισοδυναμεί **με** $\mathbf{q}$» ή « $\mathbf{p}$ αν και μόνο αν $\mathbf{q}$» ή « $\mathbf{p}$ συνεπάγεται $\mathbf{q}$ και αντίστροφα» ή « αν $\mathbf{p}$, τότε και μόνο τότε $\mathbf{q}$»

Η λογική τιμή της ισοδυναμίας "$\mathbf{p\Leftrightarrow q}$" είναι:

- **Ψευδής,** αν οι προτάσεις είναι $\mathbf{p,q}$ είναι **ετερότιμες.**
- **Αληθής,** αν οι προτάσεις είναι $\mathbf{p,q}$ είναι **ομότιμες .**
- Πίνακας αληθείας της "$\mathbf{p\Leftrightarrow q}$"

p	q	$\mathbf{p\Rightarrow q}$	$\mathbf{q\Rightarrow p}$	$\mathbf{p\Leftrightarrow q}$
α	α	α	α	α
α	ψ	ψ	α	ψ
ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	ψ	α	α	α

(*) **Σχόλιο:** Δύο λογικές προτάσεις θα τις λέμε **ισοδύναμες,** αν και μόνο αν η πρόταση "$\mathbf{p\Leftrightarrow q}$" είναι αληθής ή ισοδύναμα όταν οι προτάσεις $\mathbf{p,q}$ είναι ομότιμες.

2.10 Άρνηση ή αντίθετη

Άρνηση ή αντίθετη μιας λογικής πρότασης $\mathbf{p}$, ονομάζουμε την πρόταση "**όχι p**" και τη συμβολίζουμε με $\bar{\mathbf{p}}$.

- Πίνακας αληθείας της "**όχι p**"

p	$\bar{\mathbf{p}}$
α	ψ
ψ	α

- **Βασικές προτάσεις και η άρνηση τους**

Πρόταση Q:	**Άρνηση $\bar{Q}$**
« και »	« ή »
Για κάθε $(\forall)$	Υπάρχει $(\exists)$
$\alpha=\beta$	$\alpha\neq\beta$
$\alpha=\beta$	$\alpha<\beta$ ή $\alpha>\beta$
$\alpha>\beta$	$\alpha\leq\beta$
$\alpha\geq\beta$	$\alpha<\beta$
$p\Rightarrow q$	$\bar{p}\Rightarrow\bar{q}$
$p\wedge q$	$\bar{p}\vee\bar{q}$
$p\vee q$	$\bar{p}\wedge\bar{q}$
$p\Leftrightarrow q$	$\bar{p}\Leftrightarrow\bar{q}$
$\alpha=0$ ή $\beta=0$	$\alpha\neq0$ και $\beta\neq0$
$\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$	$\alpha=0$ και $\beta=0$
$\alpha=0$ και $\beta\neq0$	$\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$

2.11. Αντιθετοαντιστροφή

α) Αν έχουμε την σύνθετη πρόταση, «αν **p**, τότε **q** », δηλαδή τη συνεπαγωγή $p\Rightarrow q$, τότε την πρόταση « αν όχι p, τότε όχι q», δηλαδή την πρόταση $\bar{q}\Rightarrow\bar{p}$, την ονομάζουμε αντιθετοαντιστροφή της $p\Rightarrow q$

β) Δύο αντιθετοαντίστροφες προτάσεις είναι ισοδύναμες.
Δηλαδή η λογική πρόταση $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\bar{q}\Rightarrow\bar{p})$ είναι **ταυτολογία**

γ) Πίνακας αληθείας των σημαντικότερων λογικών πράξεων

p	q	$p\Rightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}\Rightarrow\bar{p}$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\bar{q}\Rightarrow\bar{p})$
α	α	α	ψ	ψ	α	α	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α	α
ψ	α	α	α	ψ	α	ψ	α	α
ψ	ψ	α	α	α	α	ψ	ψ	α

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Α, αν είναι αληθείς ή με Ψ, αν είναι ψευδείς.

1. $\alpha^4+1>0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.
2. $\alpha=3\Rightarrow\alpha^2=3\alpha$
3. $2\alpha^2=\alpha\Rightarrow\alpha=0$
4. $\alpha\neq5$ και $\beta\neq2\Rightarrow\alpha+\beta\neq7$
5. $\alpha+\beta=8\Rightarrow\alpha=5$ και $\beta=3$
6. $x+2>7\Leftrightarrow x>5$
7. $x+2>7\Rightarrow x>4$
8. $x^2=1\Leftrightarrow x=1$
9. $x=1\Rightarrow x^2=1$
10. $\alpha^2-\beta^2=\beta^2-\alpha^2\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

Άσκηση 2.2 Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς:

α) $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$

β) $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=A$

γ) $A=B'\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

δ) $(p\wedge q)\Rightarrow(q\wedge p)$

ε) $(p\wedge q)\Rightarrow p$

στ) $q\Rightarrow(q\vee p)$

Άσκηση 2.3 Δίνονται οι προτάσεις:

$P: x^2+y^2=0, x,y\in\mathbb{R}$, $Q: x=0$ και $y=0, x,y\in\mathbb{R}$,

Να διατυπώσετε την πρόταση $P\Rightarrow Q$, την αντίστροφη της, και την αντιθετοαντιστροφή της

Άσκηση 2.4 Με σύνολο αναφοράς το $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, να βρείτε το σύνολο αλήθειας των προτάσεων:

i) $p(x)$: Ο αριθμός x διαιρεί το 12»

ii) $q(x)$: $x+3=5$

iii) $r(x)$: $3x+3=14$

iv) $s(x)$: $4x+3<15$

Άσκηση 2.5 Δίνεται η πρόταση:
$p(x)$: « Ο **x** είναι διαιρέτης του **14** και του **21**».
Με σύνολο αναφοράς το σύνολο $A=\{1,2,3,...,28\}$ να βρείτε το σύνολο αλήθειας $\mathbf{G_p}$.

Άσκηση 2.6 Δίνεται πρόταση $p(x): x^2-100=0$, με $x\in\mathbb{R}$
Να ορίσετε την πρόταση $\bar{p}(x)$ και να βρείτε το σύνολο αλήθειας

Άσκηση 2.7 Να γράψετε την άρνηση των παρακάτω προτάσεων:
α) $\alpha=\beta$
β) $\alpha<\beta$
γ) $\alpha\leq\beta$
δ) $\alpha\neq5$ και $\beta=2$
ε) $\alpha\geq5$ ή $\beta\neq2$

Άσκηση 2.8 Να γράψετε την αντιθετοαντιστροφή των παρακάτω προτάσεων:
α) Αν $\alpha=100$ τότε $\beta\neq5$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
β) Αν $\alpha<\beta$ τότε $\kappa\geq\lambda$ με $\alpha,\beta,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$
γ) Αν $\alpha\cdot\beta=0$ τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
δ) Αν $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε $\alpha=0$ και $\beta=0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$