

ΕΡΓΑΣΙΑ 7^Η. ΝΙΟΣΤΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ**7.1 Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού**

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και κάποιες ιδιότητες.

Είχαμε πει ότι υπάρχουν δύο αριθμοί που το τετράγωνο τους ισούται με 4, το 2 και το -2 τον θετικό αριθμό 2 τον ονομάσαμε τετραγωνική ρίζα του 4 και γράψαμε $\sqrt{4} = 2$.

Έτσι έχουμε τον ορισμό

Ορισμός

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός x , που όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον α .

Δηλαδή: $\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha$, με $\alpha, x \geq 0$

Σχόλια:

i) Αφού οι εξισώσεις $\sqrt{\alpha} = x$ και $x^2 = \alpha$ είναι ισοδύναμες, σημαίνει ότι έχουν τις ίδιες ρίζες ακριβώς.

Επομένως ο αριθμός $\sqrt{\alpha}$, $\alpha \geq 0$ θα είναι ρίζα και της εξίσωσης $x^2 = \alpha$, άρα την επαληθεύει που σημαίνει $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$

Για παράδειγμα:

Η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $7 - 4\sqrt{3}$ είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$, δηλαδή $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

Πράγματι $(2 - \sqrt{3})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$

ii) Να προσέξουμε, άλλο το $(\sqrt{\alpha})^2$ και άλλο το $\sqrt{\alpha^2}$, το $(\sqrt{\alpha})^2$ έχει έννοια όταν $\alpha \geq 0$ ενώ το $\sqrt{\alpha^2}$, έχει έννοια για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, αφού $\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

Επομένως η ισότητα $(\sqrt{\alpha})^2 = \sqrt{\alpha^2}$ ισχύει μόνο όταν $\alpha \geq 0$

Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

$$i). \sqrt{\alpha^2} = \sqrt{|\alpha|^2} = |\alpha|$$

$$ii). \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

$$iii). \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

7.2 Νιοστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Υπάρχουν δύο αριθμοί που αν υψωθούν στην τέταρτη, το αποτέλεσμα ισούται με 81, το 3 και το -3 , τον θετικό αριθμό 3 τον ονομάζουμε τέταρτη ρίζα του 81 και γράφουμε $\sqrt[4]{81} = 4$

Ομοίως $2^5 = 32$ και αφού οι 2 και 32 είναι θετικοί, το 2 ονομάζεται πέμπτη ρίζα του 32 και γράφουμε $\sqrt[5]{32} = 2$

Ακόμα $\sqrt[7]{128} = 2$ αφού $2^7 = 128$, $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^3$ αφού $(3^3)^5 = 3^{15}$, $\sqrt[4]{5^{20}} = 5^5$ αφού $(5^5)^4 = 5^{20}$
 $\sqrt[3]{27} = 3$ αφού $3^3 = 27$.

Η **τρύτη ρίζα** ενός αριθμού λέγεται και **κυβική ρίζα**

Γενικεύοντας, για κάθε **μη αρνητικό** α και για κάθε **θετικό ακέραιο** n , έχουμε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός

Η **n -οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός x , που όταν υψωθεί εις την n δίνει τον αριθμό α .

Δηλαδή: $\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha$, με $\alpha, x \geq 0$

Σχόλια:

i) Αφού οι εξισώσεις $\sqrt[n]{\alpha} = x$ και $x^n = \alpha$ είναι ισοδύναμες, σημαίνει ότι έχουν τις ίδιες ρίζες ακριβώς.

Επομένως ο αριθμός $\sqrt[n]{\alpha}$, $\alpha \geq 0$ θα είναι ρίζα και της εξίσωσης $x^n = \alpha$, άρα την επαληθεύει που σημαίνει $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$

Προσέξτε: Είναι $10^4 = 10000$ άρα $\sqrt[4]{10000} = 10$, είναι επίσης $(-10)^4 = 10000$ όμως δεν επιτρέπεται να γράφουμε $\sqrt[4]{10000} = -10$, αφού σύμφωνα με τον ορισμό οι ρίζες είναι **μη αρνητικοί αριθμοί**.

ii) Γράφουμε $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$.

- iii) Στον σύμβολο $\sqrt[n]{a}, a \geq 0$ ο φυσικός αριθμός n ονομάζεται **δείκτης – τάξη** της ρίζας και ο μη αρνητικός αριθμός που είναι μέσα στη ρίζα λέγεται **υπόρριζη ποσότητα**.
- iv) Αν ένας θετικός αριθμός a είναι n -οστή δύναμη ενός θετικού ρητού αριθμού β , δηλαδή $a = \beta^n$, τότε ο αριθμός $\sqrt[n]{a}$ είναι ο ρητός αριθμός β , δηλαδή $\sqrt[n]{a} = \beta$
- v) Αν όμως ένας θετικός αριθμός a δεν είναι n -οστή δύναμη ενός θετικού ρητού αριθμού, τότε ο αριθμός $\sqrt[n]{a}$ δεν είναι ρητός, και λέμε ότι είναι **άρρητος**.

Για παράδειγμα ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, αφού δεν υπάρχει θετικός ρητός αριθμός x , τέτοιος ώστε $x^2 = 2$

Θα το αποδείξουμε με την μέθοδο της άτοπο απαγωγής

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, άρα υπάρχει ρητός $\frac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ φυσικοί αριθμοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ **ανάγωγο κλάσμα** (Ανάγωγο είναι το κλάσμα που οι όροι του είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους), τέτοιο ώστε $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$

Έχουμε: $2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \Leftrightarrow \kappa^2 = 2\lambda^2$, που σημαίνει ότι ο αριθμός κ^2 είναι άρτιος, άρα και κ είναι άρτιος γιατί αν ήταν περιττός τότε

$$\kappa = 2v + 1, v \in \mathbb{N} \Rightarrow \kappa^2 = (2v + 1)^2 \Rightarrow \kappa^2 = 4v^2 + 4v + 1 \Rightarrow \kappa^2 = 2 \left(\underbrace{2v^2 + 2v}_{\mu \in \mathbb{N}} \right) + 1 = 2\mu + 1,$$

άρα κ^2 περιττός (άτοπο)

Έτσι αφού κ άρτιος θα είναι της μορφής $\kappa = 2v$ και τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\kappa^2 = 2\lambda^2 \Leftrightarrow (2v)^2 = 2\lambda^2 \Leftrightarrow 4v^2 = 2\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2v^2$$

Που σημαίνει ότι ο αριθμός είναι λ^2 άρτιος άρα και ο λ άρτιος

Εφόσον όμως οι φυσικοί αριθμοί κ, λ είναι άρτιοι το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ δεν είναι ανάγωγο (άτοπο)

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί είχαμε υποθέσει ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, άρα ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός και είναι **άρρητος**

7.2.1 Ιδιότητες των ριζών**Άμεσες συνέπειες του ορισμού**

Αν $\alpha \geq 0$ τότε: $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ και $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

Αν $n = 2k$ άρτιος, τότε $\sqrt[n]{\alpha^{2k}} = |\alpha|, \alpha \in \mathbb{R}$

Για παράδειγμα:

α) $\sqrt[4]{2^4} = 2, (\sqrt[4]{2})^4 = 2$ και $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$, ενώ η $\sqrt[4]{-2^4}$ δεν έχει έννοια, αφού το -2^4 είναι αρνητικός αριθμός.

β) $\sqrt[4]{(x-1)^4} = |x-1|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $(x-1)^4 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
ενώ $(\sqrt[4]{x-1})^4 = x-1$ για κάθε $x \geq 1$

γ) $\sqrt[5]{(x-1)^5} = x-1$, για κάθε $x \geq 1$ αφού $(x-1)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και
 $(\sqrt[5]{x-1})^5 = x-1$, για κάθε $x \geq 1$

δ) $\sqrt[4]{\alpha^8} = \alpha^2$, αφού $\alpha^8 \geq 0$ και $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Αλλά $\sqrt[4]{\alpha^{12}} = |\alpha^3| = |\alpha|^3$ και όχι $\sqrt[4]{\alpha^{12}} = \alpha^3$, αφού $\alpha^{12} \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ενώ
 $\alpha^3 \geq 0$ ή $\alpha^3 < 0$ για κάθε.

ε) Η ρίζα $\sqrt[5]{\alpha^{10} \cdot \beta^{15}}$ έχει έννοια όταν $\alpha^{10} \cdot \beta^{15} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta \geq 0$, άρα

$$\sqrt[5]{\alpha^{10} \cdot \beta^{15}} = \sqrt[5]{(\alpha^2 \cdot \beta^3)^5} = \alpha^2 \cdot \beta^3$$

στ) Η ρίζα $\sqrt[11]{1 - \frac{1}{|x|}}$ έχει έννοια όταν $|x| \neq 0$ και $1 - \frac{1}{|x|} \geq 0$.

$$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$1 - \frac{1}{|x|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x|>0)}{|x|} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1$$

Οπότε $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Ισχύουν επίσης οι ακόλουθες ιδιότητες

Αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε:

$$1. \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$$

$$2. \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (\text{εφόσον } \beta \neq 0)$$

$$3. \sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[m \cdot n]{\alpha}$$

$$4. \sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[n]{\alpha^{\frac{1}{m}}} = \sqrt[n \cdot m]{\alpha}$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αυτών θα γίνει με χρήση της ιδιότητας, $\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha$, η οποία μας βοηθά να απαλλάξουμε τις παραστάσεις από τις ρίζες, αρκεί να τις υψώσουμε σε δύναμη ίση με τον δείκτη της ρίζας.

Απόδειξη

1. Η ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}\right)^n = \left(\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}\right)^n \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{\beta}\right)^n = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta \quad (\text{που ισχύει})$$

2. Η ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^n \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{\beta}\right)^n} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{που ισχύει})$$

3. Η ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[m \cdot n]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}}\right)^{m \cdot n} = \left(\sqrt[m \cdot n]{\alpha}\right)^{m \cdot n} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m\right]^n = \alpha \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha \quad (\text{που ισχύει})$$

4. Η ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[n]{\alpha^{\frac{1}{m}}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha^{\frac{1}{m \cdot n}}} = \sqrt[n]{\alpha^{\frac{1}{m \cdot n}}} \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{m \cdot n}} = \left[\sqrt[n]{\alpha^{\frac{1}{m}}}\right]^n \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{m \cdot n}} = \alpha^{\frac{1}{m \cdot n}}$$

Σχόλια:

(i) Η ιδιότητα (1) ισχύει και περισσότερους από δύο μη αρνητικούς παράγοντες

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} \quad \text{με } a_1, a_2, \dots, a_k \text{ μη αρνητικούς αριθμούς}$$

Αν επιπλέον $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a \geq 0$ τότε ισχύει:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k\text{-παράγοντες}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k\text{-παράγοντες}}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ δηλαδή για να υψώσουμε ρίζα σε δύναμη } n\text{-ψώνουμε το υπόρριζο στη δύναμη αυτή.}$$

Παράδειγμα 1 $\left(\sqrt[5]{2^3}\right)^4 = \sqrt[5]{\left(2^3\right)^4} = \sqrt[5]{2^{12}}, \quad \left(\sqrt[3]{a^2 b^{-3}}\right)^{-2} = \sqrt[3]{\left(a^2 b^{-3}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{a^{-4} b^6}$

Οπότε λόγω της ιδιότητας (1) με a, b μη αρνητικούς αριθμούς έχουμε:

$$\sqrt[n]{a^v b} = \sqrt[n]{a^v} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ με την ιδιότητα αυτή μπορούμε να βάζουμε μέσα στη ρίζα ένα θετικό παράγοντα, αρκεί να τον υψώσουμε στην τάξη της ρίζας.}$$

Παράδειγμα 2 $4 \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{(2^2)^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^7}$

Μπορούμε να βγάζουμε έξω από την ρίζα ένα παράγοντα αρκεί να είναι σε δύναμη με εκθέτη πολλαπλάσιο της τάξης της ρίζας.

Ο παράγοντας αυτός βγαίνει έξω από την ρίζα με εκθέτη το πηλίκο

$$\frac{\text{εκθέτης του παράγοντα}}{\text{δείκτης της ρίζας}}$$

Παράδειγμα 3 $\sqrt[5]{4 \cdot 3^{10}} = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{3^{10}} = \sqrt[5]{4} \cdot 3^{\frac{10}{5}} = \sqrt[5]{4} \cdot 3^2 = 9 \cdot \sqrt[5]{4}$

Μπορούμε επίσης να απλοποιήσουμε μια ρίζα, όταν ο εκθέτης του υπόρριζου είναι μεγαλύτερος από την τάξη της ρίζας

Παράδειγμα 4 $\sqrt[5]{3^{13}} = \sqrt[5]{3^3 \cdot 3^{10}} = \sqrt[5]{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^{10}} = \sqrt[5]{3^3} \cdot 3^{\frac{10}{5}} = \sqrt[5]{3^3} \cdot 3^2 = 9 \cdot \sqrt[5]{3^3}$

Να θυμόμαστε βέβαια ότι αυτό που βγαίνει έξω από την ρίζα πρέπει να είναι μη αρνητικός αριθμός.

Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt[5]{a^6} = \sqrt[5]{a^5 \cdot a} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a} = a \cdot \sqrt[5]{a}$, αφού η $\sqrt[5]{a^6}$ έχει έννοια για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ενώ $\sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a}$ έχει έννοια μόνο για κάθε $a \geq 0$

Μπορούμε όμως να γράψουμε

$$\sqrt[5]{a^6} = \sqrt[5]{|a|^6} \sqrt[5]{|a|^5 \cdot |a|} = \sqrt[5]{|a|^5} \cdot \sqrt[5]{|a|} = |a| \cdot \sqrt[5]{|a|}$$

$$\cdot \sqrt[4]{a^{12}b} = \sqrt[4]{a^{12}} \cdot \sqrt[4]{b} = |a|^3 \cdot \sqrt[4]{b}, \text{ αφού η ρίζα έχει έννοια για κάθε } a \in \mathbb{R} \text{ και } b \geq 0.$$

$$\cdot \sqrt[3]{32a^6b^2} = \sqrt[3]{2^5 a^6 b^2} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{b^2} = 2a^2 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{b^2}$$

(ii) Με την ιδιότητα (3) μπορούμε να απλουστεύουμε παραστάσεις με διαδοχικές ρίζες και είναι αντίστοιχη της ιδιότητας $(a^v)^\mu = a^{\mu \cdot v}$ των δυνάμεων.

Παράδειγμα 5

$$\cdot \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{3^2} \cdot 3\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3^3 \sqrt{3}} = \sqrt[4]{\sqrt{(3^3)^2} \cdot 3} = \sqrt[8]{3^6 \cdot 3} = \sqrt[8]{3^7}$$

$$\cdot \sqrt[5]{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2^3} \cdot 2} = \sqrt[5]{2^6 \sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[5]{6\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[30]{2^{10}} = \sqrt[3]{2}$$

(iii) Με την ιδιότητα (4) μπορούμε να κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις ριζών με διαφορετικές τάξεις, πρέπει όμως να είμαστε ιδιαίτερος προσεκτικοί μετά τις απλοποιήσεις τάξεων και εκθετών να παραμένουν θετικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 6

$$\cdot \sqrt[3]{4^4} \cdot \sqrt[4]{4^3} = (\text{ΕΚΠ}(3,4) = 12) = \sqrt[3 \cdot 4]{4^{4 \cdot 4}} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{4^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{4^{16}} \cdot \sqrt[12]{4^9} = \sqrt[12]{4^{16} \cdot 4^9} = \sqrt[12]{4^{25}} = \sqrt[12]{(2^2)^{25}} = \sqrt[12]{2^{50}}$$

Αφού ο εκθέτης του υπόρριζου, στην τελευταία ρίζα είναι μεγαλύτερος από την τάξη της ρίζας, κάνουμε την ευκλείδεια διαίρεση $50 \div 12 = 4 \cdot 12 + 2$ και έχουμε

$$\sqrt[12]{2^{50}} = \sqrt[12]{2^{4 \cdot 12 + 2}} = \sqrt[12]{2^{4 \cdot 12} \cdot 2^2} = \sqrt[12]{2^{4 \cdot 12}} \cdot \sqrt[12]{2^2} = 2^4 \cdot \sqrt[6]{2^2} = 16\sqrt[6]{2}$$

$$\cdot \text{Η παράσταση } \sqrt[8]{a^{12}} \text{ έχει έννοια για κάθε } a \in \mathbb{R}, \text{ αφού } a^{12} \geq 0 \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R}.$$

Η γραφή όμως $\sqrt[8]{a^{12}} = \sqrt[4 \cdot 2]{a^{4 \cdot 3}} = \sqrt{a^3}$ δεν έχει έννοια, αφού η ρίζα $\sqrt{a^3}$ ορίζεται μόνο αν ο αριθμός είναι μη αρνητικός.

Μπορούμε όμως να γράψουμε $\sqrt[8]{a^{12}} = \sqrt[4 \cdot 2]{a^{4 \cdot 3}} = \sqrt{|a|^3}$

7.3 Δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό

Θα δούμε τώρα πως θα ορίσουμε δυνάμεις της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0$ μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποίες ονομάζουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**.

Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες τω δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο αριθμό.

Έτσι αν έχουμε για παράδειγμα $5^{\frac{2}{3}}$ για να ισχύει η ιδιότητα $(a^{\frac{\mu}{\nu}})^{\nu} = a^{\mu}$, τότε $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^2$

άρα ο αριθμός $5^{\frac{2}{3}}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 = 5^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5^2}$ άρα $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$.

Στην επόμενη τάξη θα δούμε πως θα ορίσουμε τις δυνάμεις a^x , όπου $a > 0$ και $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Ορισμός

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$

Σχόλια

α). Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

β). Με την βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων

Θα αποδείξουμε ότι: i) $a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot a^{\frac{\kappa}{\nu}} = a^{\frac{\mu+\kappa}{\nu}} = a^{\frac{\mu+\kappa}{\nu}}$ ii) $\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = a^{\frac{\mu \cdot \kappa}{\nu \cdot \lambda}} = a^{\frac{\mu \cdot \kappa}{\nu \cdot \lambda}}$

Είναι $a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot a^{\frac{\kappa}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{a^{\kappa}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu} \cdot a^{\kappa}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu+\kappa}} = a^{\frac{\mu+\kappa}{\nu}}$ και

$\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \left(\sqrt[\nu]{a^{\mu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\left(\sqrt[\nu]{a^{\mu}}\right)^{\kappa}} = \sqrt[\lambda]{\sqrt[\nu]{a^{\mu \cdot \kappa}}} = \sqrt[\nu \cdot \lambda]{a^{\mu \cdot \kappa}} = a^{\frac{\mu \cdot \kappa}{\nu \cdot \lambda}}$

γ) Αν α και β μη αρνητικοί αριθμοί τότε: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$, ν θετικός ακέραιος.

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες ιδιότητες

Οι δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό μας διευκολύνουν να κάνουμε πράξεις με ρίζες

Παράδειγμα 7 Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \sqrt[6]{24} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{6} = 6 \quad \text{ii) } \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt[12]{2} \quad \text{iii) } \frac{\sqrt[3]{\alpha^7}}{\sqrt[5]{\alpha^3}} = \alpha \cdot \sqrt[15]{\alpha^{11}}$$

Λύση

$$\text{i) } \sqrt[6]{24} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{6} = 24^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 2^3 \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 3^1 = 6$$

$$\text{ii) } \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{6}{12}} = 2^{\frac{13}{12}} = \sqrt[12]{2^{13}} = \sqrt[12]{2^{12} \cdot 2} = \sqrt[12]{2^{12}} \cdot \sqrt[12]{2} = 2 \cdot \sqrt[12]{2}$$

$$\text{iii) } \frac{\sqrt[3]{\alpha^7}}{\sqrt[5]{\alpha^3}} = \frac{\alpha^{\frac{7}{3}}}{\alpha^{\frac{3}{5}}} = \alpha^{\frac{7}{3} - \frac{3}{5}} = \alpha^{\frac{35}{15} - \frac{9}{15}} = \alpha^{\frac{26}{15}} = \sqrt[15]{\alpha^{26}} = \sqrt[15]{\alpha^{15} \cdot \alpha^{11}} = \sqrt[15]{\alpha^{15}} \cdot \sqrt[15]{\alpha^{11}} = \alpha \cdot \sqrt[15]{\alpha^{11}}$$

γ) Αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε ισχύει: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^{\frac{\kappa}{\nu}} < \beta^{\frac{\kappa}{\nu}}$ με $\kappa, \nu \in \mathbb{N}^*$

Λύση

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}} < \beta^{\frac{\kappa}{\nu}} \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}} < \sqrt[\nu]{\beta^{\kappa}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}\right)^{\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\beta^{\kappa}}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \alpha^{\kappa} < \beta^{\kappa} \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

Αυτό μας διευκολύνει να συγκρίνουμε αριθμούς με ρητό εκθέτη ή ρίζες διαφορετικής τάξης.

Παράδειγμα 8

α) Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\text{i) } 22^{\frac{3}{5}} \dots\dots 14^{\frac{3}{5}} \quad \text{ii) } 30^{-\frac{3}{5}} \dots\dots 9^{-\frac{3}{5}} \quad \text{iii) } 0,6^{\frac{5}{8}} \dots\dots 0,2^{\frac{5}{8}}$$

$$\text{iv) } 0,7^{-\frac{5}{8}} \dots\dots 0,3^{-\frac{5}{8}} \quad \text{v) } -\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{3}{8}} \dots\dots -\left(\frac{10}{3}\right)^{-\frac{3}{8}}$$

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$\alpha = \sqrt[6]{10}, \beta = \sqrt{2} \text{ και } \gamma = \sqrt[3]{3}$$

Λύση

$$\alpha) \text{ i) } 22 > 14 \Leftrightarrow 22^{\frac{3}{5}} > 14^{\frac{3}{5}}$$

$$\text{ii) } 30 > 9 \Leftrightarrow 30^{\frac{3}{5}} > 9^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{30^{\frac{5}{3}}} < \frac{1}{9^{\frac{5}{3}}} \Leftrightarrow 30^{-\frac{3}{5}} < 9^{-\frac{3}{5}}$$

$$\text{iii) } 0,6 > 0,2 \Leftrightarrow 0,6^{\frac{5}{8}} > 0,2^{\frac{5}{8}}$$

$$\text{iv) } (0,7) > (0,3) \Leftrightarrow (0,7)^{\frac{5}{8}} > (0,3)^{\frac{5}{8}} \Leftrightarrow \frac{1}{(0,7)^{\frac{5}{8}}} < \frac{1}{(0,3)^{\frac{5}{8}}} \Leftrightarrow (0,7)^{-\frac{5}{8}} < (0,3)^{-\frac{5}{8}}$$

$$\text{v) } \left(\frac{7}{3}\right) < \left(\frac{10}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{3}{8}} > \left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{3}{8}}} < \frac{1}{\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{3}{8}}} \Leftrightarrow -\left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{3}{8}} < -\left(\frac{10}{3}\right)^{-\frac{3}{8}}$$

β) Θα μετατρέψουμε τους αριθμούς σε ριζικά ίδιας τάξης

$$\text{Έχουμε } \beta = \sqrt{2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{8} \text{ και } \gamma = \sqrt[3]{3} = \sqrt[3 \cdot 2]{3^2} = \sqrt[6]{9}$$

$$\text{Επομένως } 8 < 9 < 10 \Leftrightarrow \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} < \sqrt[6]{10} \Leftrightarrow \beta < \gamma < \alpha$$

7.4 Βασικές Κατηγορίες Ασκήσεων

1η Κατηγορία: Πράξεις με ρίζες

Πρόσθεση – αφαίρεση ριζών

Για να προσθέσουμε ή για να αφαιρέσουμε ρίζες, πρέπει να έχουμε την ίδια τάξη και την ίδια υπόρριζη ποσότητα.

Αν δεν έχουμε την ίδια υπόρριζο ποσότητα, γράφουμε το υπόρριζο ως γινόμενο δύο αριθμών ώστε να μπορούμε να βρούμε την νιοστή ρίζα του ένα από αυτούς.

Μπορούμε επίσης να αναλύσουμε τα υπόρριζα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Πολλαπλασιασμός – διαίρεση ριζών

Για να πολλαπλασιάσουμε ή για να διαιρέσουμε ρίζες, αρκεί οι ρίζες να μπορούν να γραφούν ως δύναμη με ίδια βάση $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ και εφαρμόζουμε τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων ή να έχουν τον ίδιο δείκτη, οπότε πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τις υπόρριζες ποσότητες

Είδαμε επίσης ότι με την ιδιότητα (4) $\sqrt[n^p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$ μπορούμε οι ρίζες να έχουν τον ίδιο δείκτη, άρα γίνεται πάντα πολλαπλασιασμός ή διαίρεση ριζών

Παράδειγμα 9 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

i). $A = \sqrt{12} - 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} - 2\sqrt{75}$

ii). $B = \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2000}$

Λύση

i). $A = \sqrt{12} - 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} - 2\sqrt{75} = \sqrt{4 \cdot 3} - 2\sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{16 \cdot 3} - 2\sqrt{25 \cdot 3} =$

$$= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 12\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 2 - 6 - 12 - 10 \sqrt{3} = -26\sqrt{3}$$

ii). $B = \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2000} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} - \sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} + \sqrt[3]{10^3 \cdot 2} =$

$$= 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 2^2\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[3]{2} = 2 - 3 - 4 + 10 \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

Παράδειγμα 10 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

i). $\Delta = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

ii). $E = \sqrt[6]{25} \cdot \sqrt[6]{27 \cdot 125} \cdot \sqrt[6]{135}$

iii). $\Gamma = \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{54}$

Λύση

i). $\Delta = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{15}{30} + \frac{10}{30} + \frac{6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}} = \sqrt[30]{2^{30} \cdot 2} = \sqrt[30]{2^{30}} \cdot \sqrt[30]{2} = 2 \cdot \sqrt[30]{2}$

ii). $E = \sqrt[6]{25} \cdot \sqrt[6]{27 \cdot 125} \cdot \sqrt[6]{135} = \sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{3^3 \cdot 5^3} \cdot \sqrt[6]{5 \cdot 3^3} = 5^{\frac{2}{6}} \cdot (3^3 \cdot 5^3)^{\frac{1}{6}} \cdot (5 \cdot 3^3)^{\frac{1}{6}} =$

$$= (5^2)^{\frac{1}{6}} \cdot (3^3 \cdot 5^3)^{\frac{1}{6}} \cdot (5 \cdot 3^3)^{\frac{1}{6}} =$$

[γράψαμε $5^{\frac{2}{6}} = 5^{2 \cdot \frac{1}{6}} = (5^2)^{\frac{1}{6}}$ για να σχηματίσουμε γινόμενο δυνάμεων με ίδιο εκθέτη]

$$= (5^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 5 \cdot 3^3)^{\frac{1}{6}} = (5^6 \cdot 3^6)^{\frac{1}{6}} = [(5 \cdot 3)^6]^{\frac{1}{6}} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\begin{aligned} \text{iii). } \Gamma &= \sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{54} = \sqrt{2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = \\ &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 11

Να αποδείξετε ότι αριθμός $2 - \sqrt{2}$ είναι κυβική ρίζα του αριθμού $20 - 14\sqrt{2}$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $(2-\sqrt{2})^3 = 20-14\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{2})^3 &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 = 8 - 12 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot 2 - (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = \\ &= 20 - 12 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} = 20 - 14 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

2^η Κατηγορία: Οι ασκήσεις που ακολουθούν είναι εφαρμογή των ιδιοτήτων- πράξεων των ριζών, της διάταξης, απολύτων τιμών σε συνδυασμό με τις μεθόδους απόδειξης.

Παράδειγμα 12 Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι παραστάσεις, να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z όταν: $\sqrt{x-2} + \sqrt[5]{y+3} + \sqrt[3]{2x+3y+5z} = 0$

Λύση

Έχουμε άθροισμα μη αρνητικών αριθμών μηδέν, άρα θα πρέπει

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{x-2}=0, \sqrt[5]{y+3}=0 \text{ και } \sqrt[3]{2x+3y+5z}=0 \right) \Leftrightarrow (x-2=0, y+3=0 \text{ και } 2x+3y+5z=0) \Leftrightarrow \\ & (x=2, y=-3 \text{ και } 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 5z=0) \Leftrightarrow (x=2, y=-3 \text{ και } -5+5z=0) \Leftrightarrow (x=2, y=-3 \text{ και } z=1) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 13 Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\sqrt{9^{34} + 81^{15}}}{\sqrt{9^{32} + 27^{20}}} = 9 \qquad \beta) \frac{\sqrt{8^{11} - 4^{15}}}{\sqrt{4^{11} + 3 \cdot 16^7}} = 4\sqrt{2}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{\sqrt{9^{34} + 81^{15}}}{\sqrt{9^{32} + 27^{20}}} = \frac{\sqrt{(3^2)^{34} + (3^4)^{16}}}{\sqrt{(3^2)^{32} + (3^3)^{20}}} = \frac{\sqrt{3^{68} + 3^{64}}}{\sqrt{3^{64} + 3^{60}}} = \frac{\sqrt{3^{64}(3^4 + 1)}}{\sqrt{3^{60}(3^4 + 1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3^{64}(3^4 + 1)}{3^{60}(3^4 + 1)}} = \sqrt{3^{64-60}} = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$$

$$\beta) \frac{\sqrt{8^{11} - 4^{15}}}{\sqrt{2 \cdot 4^{11} + 3 \cdot 8^7}} = \frac{\sqrt{(2^3)^{11} - (2^2)^{15}}}{\sqrt{2 \cdot (2^2)^{11} + 3 \cdot (2^3)^7}} = \frac{\sqrt{2^{33} - 2^{30}}}{\sqrt{2 \cdot 2^{22} + 3 \cdot 2^{21}}} = \frac{\sqrt{2^{33} - 2^{30}}}{\sqrt{2^{23} + 3 \cdot 2^{21}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^{30}(2^3 - 1)}}{\sqrt{2^{21}(2^2 + 3)}} = \sqrt{\frac{2^{30} \cdot 7}{2^{21} \cdot 7}} = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^8 \cdot 2} = \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{2} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

Παράδειγμα 14 Αν $-3 < x < 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = 5\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3\sqrt{x + 3}^2 + \sqrt{4x^2 - 16x + 16}$$

Λύση

Η παράσταση γράφεται

$$A = 5\sqrt{(x-2)^2} - 3\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(2x-4)^2} \stackrel{\sqrt{a^2}=|a|}{=} 5|x-2| - 3|x+3| + |2x-4| =$$

$$= 5|x-2| - 3|x+3| + 2|x-2| = 7|x-2| - 3|x+3| \stackrel{*}{=} 7(-x+2) - 3(x+3) =$$

$$= -7x + 14 - 3x - 9 = -10x + 5$$

* Είναι $-3 < x < 2$, άρα $x+3 > 0$ και $x-2 < 0$ οπότε $|x-2| = -x+2$ και $|x+3| = x+3$

Παράδειγμα 15 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$A = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}, \text{ αν } |x| < 1 \quad B = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}, x, y > 0$$

$$\Gamma = \sqrt{2x^2 - 2x|x|}$$

Λύση

$$A = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2)^2 - 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 - 1)^2} = |x^2 - 1| = 1 - x^2, \text{ αφού}$$

$$|x| < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0, \text{ άρα } |x^2 - 1| = 1 - x^2$$

$$B = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} = \sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = |\sqrt{x} + \sqrt{y}| = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

αφού $x, y > 0$

$$\Gamma = \sqrt{2x^2 - 2x|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 2x^2}, & \text{αν } x \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 + 2x^2}, & \text{αν } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \geq 0 \\ \sqrt{4x^2}, & \text{αν } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \geq 0 \\ 2|x|, & \text{αν } x < 0 \end{cases} = |x| - x \quad \text{ή}$$

$$\Gamma = \sqrt{2x^2 - 2x|x|} = \sqrt{x^2 - 2x|x| + x^2} = \sqrt{|x|^2 - 2x|x| + x^2} = \sqrt{(|x| - x)^2} = ||x| - x| = |x| - x$$

αφού $|x| - x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 16 Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} > 0$ για κάθε $x, y > 0$

Λύση

Θα δείξουμε ότι

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} > 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2 > 0 \Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + 2(\sqrt[3]{y})^2 > 0$$

$$(\sqrt[3]{x})^2 + \underbrace{(\sqrt[3]{x})^2 - 2\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}_{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2} + (\sqrt[3]{y})^2 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y})^2 > 0$$

(που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών)

Παράδειγμα 17 Αν n φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Με την βοήθεια της παραπάνω σχέσης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9$$

Λύση

$$\text{Είναι } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad (\text{απεδείχθη})$$

$$\text{Δείξαμε ότι: } \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad 1$$

Θέτουμε στην 1 όπου $n = 1, 2, 3, \dots, 99$ και παίρνουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

.

.

.

$$\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}} = \sqrt{99}-\sqrt{98}$$

$$\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = \sqrt{100}-\sqrt{99}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη αυτές τις 99 ανισότητες και παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \\ & = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{99}-\sqrt{98} + \sqrt{100}-\sqrt{99} = -1 + \sqrt{100} = 9 \end{aligned}$$

3η Κατηγορία: Μετασχηματισμός κλασμάτων σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

Επειδή δεν είναι εύκολες οι πράξεις μεταξύ παραστάσεων στις οποίες υπάρχουν παρονομαστές με αριθμούς άρρητους (είναι δύσκολο να κάνουμε πράξεις με Ε.Κ.Π. άρρητων αριθμών) για αυτό είναι απαραίτητη η «ρητοποίηση» των παρονομαστών αυτών.

Δηλαδή η μετατροπή των κλασμάτων αυτών σε ισοδύναμο τους με ρητό παρονομαστή.

• Για παράδειγμα το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{2}}$ σημαίνει ότι πρέπει να χωρίσουμε την μονάδα σε $\sqrt{2}$ ίσα κομμάτια και να πάρουμε το ένα, πράγμα αδύνατο.

Όμως $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε το πρόβλημα γίνεται απλούστερο, γιατί το $\sqrt{2}$ είναι η

υποτείνουσα ισοσκελούς και ορθογωνίου τριγώνου πλευράς 1, οπότε το $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι ίσο με το μισό της υποτείνουσας του.

$$\text{Γενικά: } \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\beta \cdot \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}} = \frac{\beta \cdot \sqrt{\alpha}}{(\sqrt{\alpha})^2} = \frac{\beta \cdot \sqrt{\alpha}}{\alpha}$$

• Αν έχουμε το κλάσμα $\frac{3}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{3}{3^{\frac{2}{5}}}$ πρέπει ο παρονομαστής $3^{\frac{2}{5}}$ να γίνει 3^1 , άρα θα πολ-

λαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $3^1 \div 3^{\frac{2}{5}} = 3^{1-\frac{2}{5}} = 3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3}$

$$\text{Οπότε } \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{3}{3^{\frac{2}{5}}} = \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{3}{5}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{3^{\frac{2+3}{5}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{27}}{3} \quad \eta \quad \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{27}}{3}$$

Γενικά:

Αν $v > \kappa$ τότε $\frac{\beta}{\sqrt{v} \alpha^\kappa} =$ πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{v} \alpha^{v-\kappa} =$

$$= \frac{\beta \cdot \sqrt[v]{a^{v-k}}}{\sqrt[v]{a^k} \cdot \sqrt[v]{a^{v-k}}} = \frac{\beta \cdot \sqrt[v]{a^{v-k}}}{\sqrt[v]{a^k \cdot a^{v-k}}} = \frac{\beta \cdot \sqrt[v]{a^{v-k}}}{\sqrt[v]{a^v}} = \frac{\beta \cdot \sqrt[v]{a^{v-k}}}{a}$$

Αν $v < \kappa$ τότε θα είναι $\kappa = \rho \cdot v + v$ (ευκλείδεια διαίρεση) και έχουμε:

$$\frac{\beta}{\sqrt[v]{\alpha^k}} = \frac{\beta}{\sqrt[v]{\alpha^{v \cdot q + v}}} = \frac{\beta}{\sqrt[v]{\alpha^{v \cdot q} \cdot \alpha^v}} = \frac{\beta}{\alpha^q \sqrt[v]{\alpha^v}} \text{ και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.}$$

Μπορούμε βέβαια να μετατρέψουμε τις ρίζες σε δυνάμεις με ρητό εκθέτη και έχουμε:

$$\frac{\beta}{\sqrt[v]{\alpha^\kappa}} = \frac{\beta}{\alpha^{\frac{\kappa}{v}}} = \beta \cdot \alpha^{-\frac{\kappa}{v}}$$

Παράδειγμα 18 Να γράψετε με ρητό παρονομαστή τα παρακάτω κλάσματα:

$$\alpha) \frac{6}{\sqrt{3}} \qquad \beta) \frac{35}{\sqrt[3]{7^5}} \qquad \gamma) \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}}, x > 0$$

Λύση

$$\alpha) \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\beta) \frac{35}{\sqrt[3]{7^5}} = \frac{35}{\sqrt[3]{7^3 \cdot 7^2}} = \frac{35}{\sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{35}{7 \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{7}}{7}$$

$$\gamma) \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}} = \frac{\sqrt[5]{x^{2.2}}}{\sqrt[10]{x^7}} = \frac{\sqrt[10]{x^4}}{\sqrt[10]{x^7}} = \sqrt[10]{\frac{x^4}{x^7}} = \sqrt[10]{\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}} = \frac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^3} \cdot \sqrt[10]{x^7}} = \frac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^{10}}} = \frac{\sqrt[10]{x^7}}{x}$$

* μπορούμε επίσης να γράψουμε: $\frac{\sqrt[10]{x^4}}{\sqrt[10]{x^7}} = \frac{\sqrt[10]{x^4} \cdot \sqrt[10]{x^3}}{\sqrt[10]{x^7} \cdot \sqrt[10]{x^3}} = \frac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^{10}}} = \frac{\sqrt[10]{x^7}}{x}$

4η Κατηγορία: Συζυγείς παραστάσεις λέγονται οι παραστάσεις που το γινόμενο τους είναι διαφορά τετραγώνων

Αν έχουμε κλάσματα της μορφής $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma}}$ ή $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta} \pm \gamma}$ τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή

Παράσταση	Συζυγής	Γινόμενο
$\alpha \pm \beta$	$\alpha \mp \beta$	$\alpha \pm \beta \quad \alpha \mp \beta = \alpha^2 - \beta^2$
$\sqrt{5} - \sqrt{3}$	$\sqrt{5} + \sqrt{3}$	$\sqrt{5} - \sqrt{3} \quad \sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2 = 2$
$-\sqrt{7} + 2 = 2 - \sqrt{7}$	$2 + \sqrt{7}$	$2 - \sqrt{7} \quad 2 + \sqrt{7} = 2^2 - \sqrt{7}^2 = 4 - 7 = -3$
$-\sqrt{5} - \sqrt{3} = -\sqrt{5} + \sqrt{3}$	$\sqrt{5} - \sqrt{3}$	$-\sqrt{5} - \sqrt{3} \quad \sqrt{5} + \sqrt{3} = -\sqrt{5}^2 + \sqrt{3}^2 = -2$
$\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$	$\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$	$\begin{aligned} & [\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}] \cdot [\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}] = \\ & = \sqrt{5}^2 - \sqrt{3} + \sqrt{2}^2 = 5 - 3 + 2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \\ & = 5 - 5 - 2\sqrt{6} = -2\sqrt{6} \end{aligned}$

Παράδειγμα 19 Να γράψετε με ρητό παρονομαστή τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$ β) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$ γ) $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

Λύση

$$\alpha) \frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6} \quad \sqrt{7} + \sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{7} + \sqrt{6}}{7 - 6} = \frac{3 \cdot \sqrt{7} + \sqrt{6}}{1} = 3\sqrt{7} + \sqrt{6}$$

$$\beta) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} \quad \sqrt{5} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{6} \quad \sqrt{5} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} \quad \sqrt{5} - \sqrt{6}}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{12}}{5 - 6} = \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{10} = 2\sqrt{3} - \sqrt{10}$$

γ) Σε αυτό το παράδειγμα θα προσπαθήσουμε να εμφανίσουμε την ταυτότητα $\alpha^3 - 1^3$ με $\alpha = \sqrt[3]{2}$ και $\beta=1$, γιαυτό θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με την παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = (\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1$

$$\text{Έχουμε } \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2}-1) \cdot [\sqrt[3]{2}^2 - \sqrt[3]{2} + 1]} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{2-1} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$$

5η Κατηγορία: Ανισότητες

Για να αποδείξουμε ανισότητες με ρίζες, ελέγχουμε αν είναι και τα δύο μέλη θετικά και στη συνέχεια υψώνουμε σε κατάλληλο εκθέτη.

Παράδειγμα 20 Να αποδείξετε ότι: $3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$

Λύση

Επειδή και τα δύο μέλη είναι θετικά ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned} 3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{2} + \sqrt{6} &\Leftrightarrow 3 + \sqrt{5}^2 < 2\sqrt{2} + \sqrt{6}^2 \Leftrightarrow 9 + 5 + 6\sqrt{5} < 8 + 6 + 4\sqrt{12} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 14 + 6\sqrt{5} < 14 + 4\sqrt{12} \Leftrightarrow 6\sqrt{5} < 4\sqrt{12} \Leftrightarrow 3\sqrt{5} < 2\sqrt{12} \Leftrightarrow 3\sqrt{5}^2 < 2\sqrt{12}^2 \Leftrightarrow 45 < 48 \\ &(\text{που ισχύει}) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 21 Να αποδείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ και στη συνέχεια να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

Λύση

Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow 3^3 < \sqrt[3]{30}^3 < 4^3 \Leftrightarrow 27 < 30 < 64 \text{ που ισχύει}$$

$$\text{Είναι } 3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow -3 > -\sqrt[3]{30} > -4 \Leftrightarrow 6 - 3 > 6 - \sqrt[3]{30} > 6 - 4 \Leftrightarrow 3 > 6 - \sqrt[3]{30} > 2$$

$$\text{Έτσι έχουμε } 6 - \sqrt[3]{30} < 3 \text{ και } 3 < \sqrt[3]{30}, \text{ άρα } 6 - \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{30}$$

Παράδειγμα 22 Να διατάξετε τους αριθμούς α, β, γ από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, όταν $\alpha = \sqrt[6]{10}, \beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$

Λύση

ΕΡΓΑΣΙΑ 7η

ΝΙΟΣΤΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 7.1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{llll}
 \alpha) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} & \beta) \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} & \gamma) \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^5}, \alpha \geq 0 & \delta) \sqrt[5]{\alpha} \cdot \sqrt[5]{\alpha^4}, \alpha \geq 0 \\
 \epsilon) \frac{\sqrt[3]{\alpha^4} \cdot \sqrt[3]{\alpha^9}}{\sqrt[3]{\alpha^{10}}}, \alpha > 0 & \sigma\tau) \frac{\sqrt[3]{5^4} \cdot \sqrt[3]{5^8}}{\sqrt[3]{5^6}} & \zeta) \frac{\sqrt[6]{5^9} \cdot \sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{125^2}} & \eta) \sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt[3]{4^2} \\
 \theta) \sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2} & \iota) \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} & \kappa\alpha) \frac{\sqrt[3]{5^5} \cdot \sqrt[12]{5}}{\sqrt[4]{5^3}} &
 \end{array}$$

Άσκηση 7.2. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{llll}
 \alpha) \sqrt{\sqrt{5^3}} \cdot \sqrt[8]{5^2} & \beta) \sqrt{\sqrt[5]{2^{17}}} \cdot \sqrt[10]{2^3} & \gamma) \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{17}}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{2^7}} & \delta) \frac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{25^{17}}}}{\sqrt[5]{\sqrt{5^7}}}
 \end{array}$$

Άσκηση 7.3. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha) \sqrt{6} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}} = 6 & \beta) \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 5\sqrt{3} - \sqrt{2} \\
 \gamma) \sqrt{31+6\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{36}}}} = 7 & \delta) \frac{1}{3-\sqrt{21}^2} + \frac{1}{3+\sqrt{21}^2} = 3\sqrt{21} \\
 \epsilon) \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{2}-5} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{2}+5} = 7 &
 \end{array}$$

Άσκηση 7.4. Να δείξετε ότι: $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ **Άσκηση 7.5.** Αν $\alpha, \beta > 0$, να γράψετε με τη μορφή μιας ρίζας τις παραστάσεις:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha) \sqrt[5]{2^3 \sqrt{2^2} \sqrt{2^5}} & \beta) \sqrt[5]{\alpha^3 \sqrt{\alpha^2 \beta} \sqrt{\alpha \beta}} & \gamma) \sqrt{\alpha^4 \cdot \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^5}} \\
 \delta) \sqrt{\alpha^4 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[4]{\alpha^5}} & \epsilon) \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} & \sigma\tau) \sqrt{\alpha^3 \cdot \beta \cdot \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \beta^3 \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \beta^4}
 \end{array}$$

Άσκηση 7.6. Να γράψετε με ρητό παρονομαστή τα παρακάτω κλάσματα:

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \alpha > 0, \quad B = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \Gamma = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}, \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

$$E = \frac{2}{\sqrt{3}-1}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$$

Άσκηση 7.7. α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(\sqrt{3}+5)^2$ και $(\sqrt{5}-3)^2$

β) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \sqrt{28+10\sqrt{3}} + 2\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

Άσκηση 7.8. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{20} \cdot \sqrt{50} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$

β) $B = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$

γ) $\Gamma = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}, \text{ αν } |x| > 1$

δ) $\Delta = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} - \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1}, \text{ αν } |x| < 1.$

ε) $E = \sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Άσκηση 7.9. Έστω $\alpha = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

α) Να δείξετε ότι: $\alpha > 0$

β) Να βρείτε το α^2

γ) Να βρείτε τον αριθμό α

Άσκηση 7.10. Να αποδείξετε ότι:

α). $2 > \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$

β) $\frac{\alpha^2 + 3}{\sqrt{\alpha^2 + 2}} > 2$

γ) $\sqrt{10+2\sqrt{15}} > \sqrt{5} + \sqrt{3}$

Άσκηση 7.11. Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ να δείξετε ότι:

α) $\alpha < \sqrt{\alpha\beta} < \beta$

β) $\alpha < \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} < \gamma$

Άσκηση 7.12. Αν $\alpha > 1$, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{\alpha}{\sqrt[4]{\alpha^3}}, \sqrt{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha}, \alpha$$

Άσκηση 7.13. Αν $0 < \alpha < 1$, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}}, \sqrt[6]{\alpha}, \sqrt[5]{\alpha}, \alpha$

Άσκηση 7.14. α) Αν $x, y \geq 0$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, τότε ισχύει η ισότητα;

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma\alpha} \leq \alpha + \beta + \gamma$

γ) Να δείξετε ότι $\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{8} < 9$

Άσκηση 7.15. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έχουν έννοια οι παραστάσεις:

$$A = \frac{2x-1}{x^5+5x}, \quad B = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}+x}, \quad \Gamma = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x}, \quad \Delta = \frac{\sqrt{|x|+x}}{|x-1|-3}, \quad E = \frac{\sqrt{|x|+x}}{|x|-x}$$

Άσκηση 7.16. Δίνεται ο αριθμός $\alpha = \left(\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}} \right)^2$

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό α

β) Για $\alpha = 2$ και αν ισχύει $\alpha < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$\Pi = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} \text{ είναι ανεξάρτητη του } x$$

Άσκηση 7.17. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = 2 \quad \beta) \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 4 \quad \gamma) \sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 1$$

Άσκηση 7.18. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \sqrt{7+2\sqrt{10}} \quad \beta) \sqrt{5-2\sqrt{6}} \quad \gamma) \sqrt{5-\sqrt{24}} \quad \delta) \sqrt{8-4\sqrt{3}} \quad \epsilon) \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Άσκηση 7.19. Αν $d(3x, -1) < 2$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{1 - 4x + 4x^2} \quad B = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{9x^2 - 1}{\sqrt{1 - 6x + 9x^2}}$$

Τράπεζα Θεμάτων

Άσκηση 7.20 (ΘΕΜΑ2_36778)

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

- α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)
- β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

Άσκηση 7.21(1281)

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$

- α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$ (Μονάδες 13)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Άσκηση 7.22(ΘΕΜΑ2_34152)

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; (Μονάδες 7)
- β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; (Μονάδες 8)
- γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$. (Μονάδες 10)

Άσκηση 7.23 (1338)

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$ τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ (Μονάδες 15)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B . (Μονάδες 10)

Άσκηση 7.24(ΘΕΜΑ 2_34157)

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)
- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$. (Μονάδες 13)

Άσκηση 7.25 (ΘΕΜΑ 2_37192)

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41, \quad \sqrt{3} \cong 1,73, \quad \sqrt{5} \cong 2,24, \quad \sqrt{7} \cong 2,64$$

- α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)
- β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

Άσκηση 7.26 (1376)

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

Άσκηση 7.27 (1377)

- α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. (Μονάδες 12)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

Άσκηση 7.28(1378)

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
- β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$ (Μονάδες 12)

Άσκηση 7.29 (1379)

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x-4}$.

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)
- β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$ (Μονάδες 13)

Άσκηση 7.30 (ΘΕΜΑ2_37197)

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
- β) Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ (Μονάδες 12)

Άσκηση 7.31 (ΘΕΜΑ2_37198)

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
- β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$ (Μονάδες 12)

Άσκηση 7.32 (ΘΕΜΑ 2_37189)

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$
(Μονάδες 12)

Άσκηση 7.33

6. ΘΕΜΑ 2_14849

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

Άσκηση 7.34

10. ΘΕΜΑ 2_14774

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι:

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$

Άσκηση 7.35

11. ΘΕΜΑ 2_14682

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

β) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

Άσκηση 7.36

12. ΘΕΜΑ 2_14599

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

Άσκηση 7.37

13. ΘΕΜΑ 2_14452

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

Άσκηση 7.38

14. ΘΕΜΑ_2_12943

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

Άσκηση 7.39

15. ΘΕΜΑ_2_14750

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α, β με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.

Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$

Άσκηση 7.40

16. ΘΕΜΑ_3_14805

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$.

Άσκηση 7.41

17. ΘΕΜΑ_3_37172

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Άσκηση 7.42

18. ΘΕΜΑ_3_34155

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B .

Άσκηση 7.43

19. ΘΕΜΑ_4_14931

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

A n d r e a s P a n t e r i s